第3回数理解析I演習 (2010年10月22日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 勝島義史

[13] 正実数列 $\{a_n\}_n$ にたいし $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ が存在すれば $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ が成り立つことを示せ.

[14] 次の整級数の収束半径を求めよ.

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n \qquad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \qquad (3)\ \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n\ \ (a>0) \qquad (4)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

[15] ベキ級数 $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ の収束半径がおのおの R_1, R_2 であるとき $\sum a_n b_n z^n$ の収束半径は $R_1 R_2$ 以上であることを示せ.

[16] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ を絶対収束する二つの級数とする. $c_n = \sum_{j+k=n} a_j b_k$ を定義すると $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ も絶対収束し $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$ が成り立つことを示せ. さらに, これを用いて $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は $f(z+w) = f(z)f(w)$ を満たすことを示せ.

[17] 区間 $(0,1)$ に含まれる有理数は可算個である。これらを適当に並べて数列 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ を作る。このとき $\sum_{n=1}^{\infty} r_n z^n$ の収束半径を調べよ。

[18] 数列 c_n を $c_1 = c_2 = 1, c_n = c_{n-1} + c_{n-2} (n \geq 3)$ で定義する。このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ の収束半径を求めよ。この級数は収束点で z の有理式と一致する。この有理式を求めよ。

[19] 展開 $(1-2\alpha z + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + P_1(\alpha)z + P_2(\alpha)z^2 + \cdots$ の係数 $P_j(\alpha)$ は Legendre 多項式と呼ばれる。P_1, P_2, P_3, P_4 を求めよ。

演習問題は `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/` からダウンロードできます. 講義メモも載せています.