第 7 回複素解析学 I 演習略解 (2006 年 12 月 1 日実施)

担当教員 平地健吾 / TA 松尾信一郎＆塚本泰三

復習ポイント

- 孤立特異点の分類.
- 一次変換の活用
- 否定命題をちゃんとつくれるようになる．"A and B"の否定は"(not A) or (not B)".

[1] 連結と弧状連結

背理法がうまく使えてない答案が目立ちました．論理は数学の基本です.

(1) 講義ノート参照．定義をちょっと勘違いしている人がいました.

(2) 一般に，Euclid 空間のある部分集合 X が開集合であるとは，X の任意の点 x に対して, ある正実数 ϵ が存在して，x を中心とする半径 ϵ の開球が X に含まれることでした．集合 C はこの定義を充たさないことを示せばよいわけです．すなわち，C のある点 x_0 が存在して，任意の正実数 ϵ に対して，x_0 を中心とする半径 ϵ の開球は C に含まれないことを示します．この否定命題がうまくつくれていない答案が続出でした.「任意 $\forall$」と「存在 $\exists$」に注意してみましょう．さて，懸念の x_0 としては，例えば，$x_0 = (0,0)$ を考えればよいですね．続きは考えてみてください.

(3) 集合 $C' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y = \sin(1/x)\}$ は函数のグラフなので連結であることに注意しましょう．集合 C は C' の閉包です．よって，C も連結になります.

(4) 例えば，点 $(0,0)$ と点 $(1/\pi, 0)$ を結ぶ C の道は存在しません．それは中間値の定理を用いて示されます．続きは考えてみてください．ヒントは x 座標の値を考えてみることです.

[2] 真性特異点

(1) 講義ノート参照.

(2) 函数 $\exp(1/z)$ の孤立特異点である原点が極でも除去可能特異点でもないことを示します．実軸に沿って $z \to 0$ とすれば $\exp(1/z) \to \infty$ ですが，虚軸に沿って $z \to 0$ としても $\exp(1/z)$ は有界のままです．これは原点が函数 $\exp(1/z)$ の真性特異点であることを示しています.

(3) Weierstrass の定理を具体例で確認するのがこの問の目的です.

[3] 除去可能特異点

(1) 講義ノートを参照.

(2) 一次変換をうまく使います．函数 f の孤立特異点を a として，f は $\{|z-a| < r\}$ で正則かつ $\mathrm{Re}(f(z)) \leq M$ を充たすとしましょう．このとき，半平面 $\{\mathrm{Re}(z) \leq M\}$ を単位円板に写す一次変換 T が存在します．そこで，函数 $T \circ f$ を考えれば，これは $\{|z-a| < r\}$ で正則かつ有界です．よって，Riemann の除去可能特異点定理より，点 a は $T \circ f$ の除去可能特異点です．さて，一次変換 T には逆写像 T^{-1} が存在して，T^{-1} も正則写像です．従って，点 a は $f = T^{-1} \circ (T \circ f)$ の除去可能特異点です．これが示したいことでした.

[4] 計算練習

答: (1) 4 位の極. (2) 除去可能. (3) 2 位の極. (4) 真性. (5) 除去可能. (6) 除去可能.

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/ hirachi/courses/complex1-2006/

(略解作成: 松尾信一郎)