第 4 回複素解析学 I 演習 (2006 年 10 月 27 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎・塚本泰三

[1] から [4] までを解きこの演習時間内に提出してください．これらは理解を深めるための問題であって試験ではありません．相談や質問や文献参照は自由にしてください．

[1] 次の積分を計算せよ．ただし積分径路はすべて正の向きにとるものとする．

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} |z-1|\,|dz|$　　(2) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^z z^{-n}\,dz,$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1},$　　(4) $\displaystyle\int_{|z|=1} |z-\alpha|^{-4}\,|dz| \quad (|\alpha| \neq 1).$

[2] γ を区分的 C^1 曲線、$f(\zeta)$ を γ の像の上で定義された連続関数とする。このとき

$$F(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ での γ の像の補集合上で連続であることを示せ (ただし $F(\infty)$ は適当に定める)。

[3] $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ で定義する．f は原点では定義されていないが，$f(0) = 1$ とすることで，$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の正則関数とみなせることを証明せよ．

[4] $f(z)$ は $|z| \leq R$ で正則な関数とする．ただし, $i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $0 < r \leq R$ となる r にたいして次が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta = f(0).$$

(2) 次の積分を計算せよ．ただし, $z = x + iy$ とする．

$$\int\int_{|z| \leq R} f(z) dx dy.$$

第 4 回レポート問題 (2006 年 10 月 27 日出題)

[1] から [2] までを解き次回の演習で提出してください．解答には A4 版レポート用紙を使い，複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めてください．これが守られていない場合には採点しません．このレポートは成績には関係しないので，誤魔化すことなく厳密に記述してください．演習への希望や質問を書いてくだされば，次回に反映するように努力します．

[1] $f(z)$ を $\mathbb{C}$ 上の C^2 級関数とするとき任意の区分的 C^1 閉曲線にたいし

$$\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = 0$$

を示せ。

[2] f は $\{z \in \mathbb{C}; |z| \le 1\}$ を含む領域で正則とする．このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z-a}dz = \begin{cases} \overline{f(0)}, & |a| < 1, \\ \overline{f(0)} - \overline{f\left(\bar{a}^{-1}\right)}, & |a| > 1, \end{cases}$$

であることを示せ．
ヒント：まず $z = e^{i\theta}$ とパラメータ表示し，積分を書き直す．さらに $\overline{f(\bar{z})}$ を用いた積分に書き直す．$\overline{f(\bar{z})}$ が正則であることを用いる．

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/complex1-2006/

(平地+塚本作成)