第12回複素解析学I演習 (2007年1月30日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎＆塚本泰三

[1] から [4] までを解いて，この演習時間内に提出してください．これらは理解を深めるための問題であって試験ではありません．相談や質問や文献参照は自由にしてください．

今日の演習は昨年度の複素解析Iの中間、期末試験からの抜粋です。

[1] 複素数 λ, z に対して z^λ はどのように定義されるか? その定義にもとづいて z^λ が z に関して正則になることを示せ (定義域の形についても説明せよ)。

[2] $f(z)$ を閉円板 $\overline{\Delta} = \{|z| \le 1\}$ 上で定義された連続関数で,

$$(1)\ \Delta = \{|z| < 1\} \text{ 上で正則; } (2)\ |z| = 1 \text{ ならば } |f(z)| = 1$$

を満たすものとする．次を示せ.

(a) $f(z)$ の零点が 0 のみのとき $f(z) = az^m$, ただし a は定数, であることを示せ.

(b) $f(z)$ が重複度もこめてただ一つの零点をつとき $f(z)$ はどのような関数か？

[3] $f(z)$ を領域 D 上の正則関数で，D 上で $|f(z) - 1| < 1$ を満たすものとする．D 内の任意の閉曲線 γ に対して

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

であることを示せ．(偏角の原理を用いてはいけません；その証明についての問題です．)

[4] 留数計算を用いて次の積分を計算せよ。

$$I(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2x\xi dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

ただしガウス積分 $I(0) = \sqrt{\pi}$ を用いてもよい。

[5]

(a) $f(z) = 3z^6 - z^2 - z + 1$ は $|z| \ge 1$ では零点を持たないことを示せ。

(b) 次の積分を求めよ：

$$\int_{|z|=1} \frac{z^5}{3z^6 - z^2 - z + 1} dz$$