第 10 回複素解析学 I 演習略解 (2007 年 1 月 12 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎・塚本泰三

[1]

(1) $1/(z-1)(z-5) = 1/4 \cdot (1/(1-z) - 1/(5-z))$ と部分分数展開する．
$1/(1-z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $1/(5-z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/5^{k+1}$ となるので答えは $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{k+1}}\right) z^k$.

(2) $\frac{1}{(z-2)^2} = (-1)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-2}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k+1}} z^{k-1}$.

(3) $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^{-j}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=\max(k,0)}^{\infty} \frac{1}{(i-k)!}\right) z^k$.

(4) $\sin(z/(z-1)) = \sin(1 + 1/(z-1))$ とし，$w = 1/(z-1)$ とおく．$\sin(1+w)$ を $w = 0$ で展開すると

$$\sin(1+w) = \sin 1 + \cos 1 \cdot w + \cdots + \frac{(-1)^n \sin 1}{(2n)!} w^{2n} + \frac{(-1)^n \cos 1}{(2n+1)!} w^{2n+1} + \cdots .$$

これに $w = 1/(z-1)$ を代入すると展開式を得る．

[2]

$\{|z| = R_n\}$ 上 $|e^z - P_n(z)| < |e^z|$ であることを見ればよいが，$\{|z| = R_n\}$ 上 $|e^z - P_n(z)| \leq {R_n}^{n+1} e^{R_n}/(n+1)!$ であることを用いればこのことは容易にたしかめられる．(問題文に追加した Q_n についての訂正文は誤りでしたので，削除をいたしました．申し訳ありませんでした．)

[3]

Δ を $\mathbb{C}$ 上の単位円板とする．

1. 仮定の不動点を α, β とする．適当な一次変換により α を 0 の場合に帰着される．すなわち，$\varphi(z) = \frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$, $F = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ とおくと，φ は単位円板を単位円板に双正則にうつすことから，F は $|z| < 1$ 上正則かつ $|F(z)| < 1$ を満たし，更に $0, \varphi^{-1}(\beta)$ を不動点とする．$\varphi^{-1}(\beta) \neq 0$ なので，Schwarz の補題により $F(z) = e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$ と書ける．$F(\varphi^{-1}(\beta)) = \varphi^{-1}(\beta)$ から $F(z) = z$ がわかり，したがって
$$f(z) = \varphi \circ F \circ \varphi^{-1}(z) = \varphi \circ \varphi^{-1}(z) = z$$
が得られる．

2. f が不動点を持つとしたらそれは $\{|z| < r\}$ 上にあるが，$\{|z| = r\}$ 上 $|\frac{f(z)-z}{2} + z| < r$ だから，f は丁度ひとつの不動点をもつ．もしくは，Δ 上に Poincare 距離をいれて完備距離空間と看做し、f が縮小写像であることを見ればよい．

3. $\mathrm{Aut}(\Delta)$ の元であって，回転以外のものをとればよい．

[4]

(1) $e^{1/z}$ の $z=0$ での留数は 1 なので留数定理より積分値は $2\pi i$.

(2) $|z|=1$ の内部に含まれる極は $z=1$ のみである. $z=1$ は 2 位の極で, その留数は $-3e/4$ である. $z=1$ における留数の計算は次のようになる.

$$\frac{d}{dz}(z-1)^2\frac{e^z}{(z-1)^2(z-3)}\bigg|_{z=1} = \frac{e(1-3)-e}{(1-3)^2} = \frac{-3e}{4}.$$

したがって, 積分値は $-3e\pi i/2$.

(3) $z=e^{i\theta}$ とおくと $\sin\theta = (z-\bar{z})/(2i)$ と表せる.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\sin\theta} &= \int_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{z-\bar{z}}{2i}}\frac{-i}{z}dz\\ &= 2\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2+2iaz-1}dz\\ &= 2\int_{|z|=1}\frac{1}{(z-i(-a+\sqrt{a^2-1}))(z-i(-a-\sqrt{a^2-1}))}dz\end{aligned}$$

ここで $|z|<1$ の中にある極は $z=i(-a+\sqrt{a^2-1})$ であり, その留数は $1/(2i\sqrt{a^2-1})$ である. したがって, 積分値は $2\cdot 2\pi i\cdot 1/(2i\sqrt{a^2-1}) = 2\pi/\sqrt{a^2-1}$ となる.

(4) 曲線 C を $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-R\le x\le R\}\cup\{Re^{i\theta}\,|\,0\le\theta\le\pi\}$ とおく. C の弧の部分を $\Gamma=\{Re^{i\theta}\,|\,0\le\theta\le\pi\}$ ともおく. C 上で $z/(z^4+5z^2+6)$ を積分することを考える.

$$\int_C\frac{z^2}{z^4+5z^2+6}dz = \int_{-R}^{R}\frac{x^2}{x^4+5x^2+6}dx + \int_\Gamma\frac{z^2}{z^4+5z^2+6}dz$$

と分解する. R を大きくとったとき, 左辺は留数定理より C 内の極の留数の和に $2\pi i$ をかけたものになる. $z/(z^4+5z^2+6) = z/(z^2+2)(z^2+3)$ から C 内の極は $z=\sqrt{2}i$ と $z=\sqrt{3}i$ になり, $z=\sqrt{2}i$ での留数は $-\sqrt{2}/2i$, $z=\sqrt{3}i$ での留数は $\sqrt{3}/2i$ となる. したがって, 左辺は $2\pi i(-\sqrt{2}/2i+\sqrt{3}/2i) = \pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ になる.
次に右辺が $R\to\infty$ としたときに求める積分になることを示す. つまり第 2 項が 0 に収束することを示す. R が十分大きいところで次のように評価できる.

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma\frac{z^2}{z^4+5z^2+6}dz\right| &\le \int_0^\pi\frac{|Re^{i\theta}|^2}{|R^4e^{4i\theta}+5R^2e^{2i\theta}+6|}|Rie^{i\theta}d\theta|\\ &\le \int_0^\pi\frac{R^3}{R^4-5R^2-6}d\theta\end{aligned}$$

これは $R\to\infty$ のときに 0 に収束する. したがって, 求める積分値は左辺を 1/2 倍した $\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$ である.

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/complex1-2006/

(解答作成: 塚本泰三)