Step 8

§ α-不変量

X: proper var. (X,Δ): lc

$\mathcal{L}$: $\mathbb{Q}$-Cartier div. s.t. $\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $|\underbrace{m\mathcal{L}}_{\text{Cartier}}| \neq \phi$

$\longrightarrow$ $\mathrm{lct}(|\mathcal{L}|_{\mathbb{Q}}, X, \Delta) = \inf\{\mathrm{lct}(D; X, \Delta) \mid \underset{\geq 0}{D} \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{L}\}$

これを α-不変量と呼んだ。

§§ α-不変量の因子的"幅"(width)を用いた言いかえてみる

Def X: normal var., Λ: 有限次元の Non empty linear system

$E \subseteq X$: prime div

$$W_E(\Lambda) := \sup\{\mathrm{mult}_E(D) \mid D \in \Lambda\}$$ ← これを Λ の E での幅と呼ぶ

Note (レポート問題) 易

$W_E(\Lambda) = 0 \iff$ E は Λ の固定点集合には含まれなくて

$\underbrace{\phi_\Lambda}_{\Lambda\text{による rat. map}}(E) = \phi_\Lambda(X)$ となる.

また E を X 上空の因子とすると i.e. $\exists f: \underset{\underset{E}{\cup}}{X'} \longrightarrow X$ proper bira'l

$$W_E(\Lambda) := W_E(f^*\Lambda)$$

Note (レポート問題) 易

これは f のとり方によらない div. valuation E にのみよる概念.

このとき

Prop 1 $\mathrm{lct}(|L|_{\mathbb{Q}}, X, 0) = \begin{cases} +\infty & L \underset{\mathbb{Q}}{\sim} 0 \\ \inf\limits_{w_E(L)>0} \dfrac{a(E;X,0)}{w_E(L)} & L \underset{\mathbb{Q}}{\not\sim} 0 \end{cases}$

⑦ $L \underset{\mathbb{Q}}{\sim} 0$ なら $D \geq 0$ $\underset{\mathbb{Q}}{\sim} L \Rightarrow D = 0$ より

$$\mathrm{lct}(D; X, 0) = +\infty$$

よって α−不変量は $+\infty$

$L \underset{\mathbb{Q}}{\not\sim} 0$ のとき.

$\underset{0}{\overset{}{D}} \underset{}{\in} |mL| \neq \phi$ ($D \geq 0$) として. $\frac{1}{m}D$ に対しての lct を考える

$\varphi : X' \longrightarrow X$ を $(X, D+\Delta)$ の log resolution とする.

$$\varphi^*\left(K_X + \Delta + \frac{t}{m}D\right) = K_{X'} + \Sigma\left(1 - a(E;X,0) + \mathrm{mult}_E \frac{t}{m}D\right)$$

$t \in \mathbb{R}$

となるので,

$t = \mathrm{lct}(\frac{1}{m}D; X, 0)$ のとき.

ある E で $1 - a(E;X,0) + \underbrace{\mathrm{mult}_E \frac{t}{m}D}_{\frac{t}{m}\mathrm{mult}_E D} = 1$

よって $\frac{t}{m}\mathrm{mult}_E D$

よって $t = \dfrac{a(E;X,0)}{\frac{\mathrm{mult}_E D}{m}}$

さらに他の E' は

$$t \leq \frac{a(E';X,0)}{\frac{\mathrm{mult}_{E'} D}{m}}$$

よって $t = \inf\limits_{E} \dfrac{a(E;X,0)}{\frac{\mathrm{mult}_E D}{m}}$ となる 分母の sup をとるのと同じ

$\mathrm{lct}(|L|_{\mathbb{Q}}, X, 0) = \inf\{\mathrm{lct}(\frac{1}{m}D, X, 0) \mid D \in |mL|\}$ より $= \inf \dfrac{a(E;X,0)}{w_E(L)}$ となる

さらに asymptotic version を考える. ← これを $\mathbb{Q}$-Cartier div に対する定義とする "幅"の

X: proper var of dim d

L: $\mathbb{Q}$-Cartier s.t. mL is Cartier & $|mL| \neq \phi$

E: X上素因子.

$$w_E(L) := \sup\left\{ \frac{w_E(|nL|)}{n} \,\middle|\, m|n \right\}$$

<u>Note</u>

- $w_E(L) = 0 \ \forall E$: X上素因子 $\Leftrightarrow L \underset{\mathbb{Q}}{\sim} 0$
- A: very ample on X
  $$w_E(L) \le L.A^{d-1}$$

レポート問題.(略)

$w_E(L)$を用いて α-不変量を表わす. (X,Δ): lc pair

Λ: 有限次元の Non empty な lin. sys.

$$\gamma_E(\Lambda; X, \Delta) := \begin{cases} +\infty & w_E(\Lambda) = 0 \\ \dfrac{a(E; X, \Delta)}{w_E(\Lambda)} & w_E(\Lambda) > 0 \end{cases}$$

ここで $a(E; X, \Delta)$ は Eでの log discrep.

幅を用いてToric多様体について χ-不変量の組み合わせ的表示を与える.

§§ Toric 多様体についての準備

Σ: fan of rational, strongly convex cone $\subseteq N_{\mathbb{R}} = \mathbb{Z}^d \otimes \mathbb{R}$

$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} r_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} r_k$ s.t. $r_i \in \mathbb{Q}^d$

$\underbrace{\sigma \cap (-\sigma) = 0}_{\text{strongly convex condition}}$

$\sigma \cap \sigma' \leq \sigma, \sigma'$ face

$\sigma \in \Sigma$, $\underset{\text{face}}{\sigma \geq \sigma'} \Rightarrow \sigma' \in \Sigma$.

$\rightsquigarrow$ Toric 多様体

$X_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ が得られる.

Prop 2 D: X_Σ 上の Torus inv div.

$D = \sum_{\rho_i \in \Sigma(1)} a_i E_i \leftarrow$ Torus inv. div は1次元の ray $\in \Sigma$ に対応している

$$\Longrightarrow \quad H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \bigoplus_{m \in P_D \cap M} \mathbb{C}\chi^m$$

$$P_D = \{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle u_\rho, m \rangle \geq -a_\rho \quad \forall \rho \in \Sigma(1) \}$$

$M_{\mathbb{R}} = N^\vee \otimes \mathbb{R}$, u_ρ: primitive vector of ρ

(∵) $P_D \cap M = \{ m \in M \mid \langle u_\rho, m \rangle \geq -a_\rho \quad \forall \rho \in \Sigma(1) \}$

より

$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \bigoplus_{\operatorname{div}(\chi^m) + D \geq 0} \mathbb{C}\chi^m$ を示せばよい.

しかしこれは次のFactよりしたがう

Fact (前期の初回に示した)

$A \subseteq \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ $(\mathbb{C}^\times)^n$-inv. sub vector sp.

$$\Longrightarrow \quad A = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m$$

実際、Weil div Dを用いて うめこみ

$$H^0(X, \mathcal{O}(D)) \subseteq \mathbb{C}(X_\Sigma) = \mathbb{C}(T_N) \text{ が定まる}$$

$$\{ f \in \mathbb{C}(X_\Sigma) \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0 \} \cup 0$$

$f \in H^0(X, \mathcal{O}(D))$ について

$D|_{T_N} = 0$ より　　f は T_N 上 正則。

よって上のうめこみは

$H^0(X, \mathcal{O}(D)) \subseteq \mathbb{C}[T_N]$ をfactorしている。

よって Factがつかえて、Propがしたがう□

まず Torus inv な linear system の E_i での幅の表示を得る(次のLem)

E_i: Torus inv. div　　Lは今、Torus

Lem 3 $L = \sum_i l_i E_i$: $\mathbb{Q}$-Cartier Torus inv. div

$V \subseteq H^0(X, L)$ Torus inv. v. space $\neq 0$

$(:= H^0(X, \lfloor L \rfloor)) \longleftarrow \mathbb{Q}$-div にたいしてはこうしておく)

$\Longrightarrow$ $A := \{ m \mid \chi^m \in V \}$: 有限集合。になる

$$W_{E_i}(\Lambda_V) = \max_{m \in A} \langle m, \rho_i \rangle + l_i$$

, ρ_i は D_i に対応する primitive vector.

Λ_V: Vに付随する linear system

(:) $t \geq 0$ について

$$V_t := \{ f \in V \mid \mathrm{mult}_{E_i}(\mathrm{div}(f)+L) \geq t \} \subseteq V$$

を考えるとこれは Torus inv. 部 sp.

よって $V_t \neq 0 \Rightarrow \exists m \in A$ s.t. $\chi^m \in V_t$ by previous Fact

$t :=$ $w_{E_i}(\Delta)$ を考えれば

$\exists m \in A$ s.t. $w_{E_i}(\Delta) = \mathrm{mult}_{E_i}(\mathrm{div}(\chi^m)+L)$

$= \langle m, e_i \rangle + l_i$ □

(したがって Lem は正しい)

<u>Note</u> $w_{E_i}(\Delta)=0 \Leftrightarrow A \subseteq \{ x \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle x, e_i \rangle + l_i = 0 \}$

hyper plane.

次に 陪的不変量 も torus invariant divisor で compute できることを示す

under some assumption as Lem 3.

Prop 4 $\mathrm{lct}(\Delta_{\mathfrak{a}}; X, \Delta) = \min_i \gamma_{E_i}(\Delta; X, B)$ (Rem! ここで $\mathrm{lct}(\Delta_{\mathfrak{a}}; X, 0) = \inf\{\mathrm{lct}(D; X, 0) \mid D \in ...$)

(:) $\leq$ は特異点解消をとって計算することによりすぐわかる (Prop 1 の証明参照)

よって $t \leq \min_i \gamma_{E_i}(X, B; \Delta)$ & $D \in \Delta$

$\Rightarrow (X, B+tD)$ は lc を示せばよい

$\mathbb{Q}$-factorization をとることで $\mathbb{Q}$-factorial を仮定してよく,

さらに 〜〜) に帰着させて問題が local problem

なため X_Σ は affine とればよい.

すなわち $X_\Sigma = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$

$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$ は simplicial rational strongly convex cone

i.e. e_i を E_i に対応する ray の primitive vector として で $\{e_i\}$ は $N_{\mathbb{Q}}$ の基底

よって
$$\begin{array}{ccc} N' & & \\ \| & & \\ \mathbb{Z}^d & \hookrightarrow & N \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (0,\dots,\underset{i\text{-th}}{1},\dots,0) & \mapsto & e_i \end{array}$$
と考えると

$\mathbb{A}^d \xrightarrow{f} X_\Sigma$ という $\underbrace{\text{étale in codim 1}}$ な finite cover を induce する

つくりかたから

$$f^*K_{X_\Sigma} = \sum E_{(0,\dots,\underset{i\text{-th}}{1},\dots,0)}$$
$$\| $$
$$\sum E_i = K_{\mathbb{A}^d}$$ とわかるので、これは ramification div がないので わかる

$H_i = (X_i = 0) \subseteq \mathbb{A}^d$

$$f^*(K_{X_\Sigma} + \underset{\sum b_i E_i \text{ とすると}}{\Delta} + tD) = K_{\mathbb{A}^d} + \sum b_i H_i + t\underset{f^*D}{D'}$$

∵) $f^*E_i = H_i \longrightarrow \mathrm{mult}_{H_i} D' = \mathrm{mult}_{E_i} D$

& $a(E_i, X, \Delta) = a(H_i, \mathbb{A}^d, \sum b_i H_i) = 1 - b_i$

よって " $\sim$ " は $X_\Sigma = \mathbb{A}^d$ で Toric inv div $= \sum H_i$ の時に

帰着された.

$\mathbb{A}^d$ の時. 次のような Lemma が示せる.

Lem 5 $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$ s.t. $\deg_{X_i} P \leq \frac{1-b_i}{t}$ $\forall i$

$D = \mathrm{div}(P)$

$\Longrightarrow (\mathbb{A}^d, \sum_{i=1}^d b_i H_i + tD)$ has I_c.

∵ (Product formulaを使った証明. 簡単な証明ないかな?)

$w_i := \deg_{x_i} p$

$(\mathbb{A}^d, \sum H_i) \subseteq \prod_{i=1}^{d} (\mathbb{P}^1, b_i 0)$ にcompact化する.

これで $\mathrm{lct}(|\mathcal{O}(w_i)|_{\mathbb{Z}}; \mathbb{P}^1, b_i 0) = \dfrac{1-b_i}{w_i} \geq t$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Product formula}} \\ (X, \Delta) = \prod_{i=1}^{k} (X_i, \Delta_i) \quad \mathcal{L} : \underset{\text{div}}{\text{Cartier}} = \prod p_i^* \underset{\text{Cartier}}{\mathcal{L}_i} \\ \qquad\qquad p_i : X \longrightarrow X_i \text{ projection} \\ \Rightarrow \mathrm{lct}(|\mathcal{L}|_{\mathbb{Z}}; X, \Delta) = \min_i (\mathrm{lct}(|\mathcal{L}_i|_{\mathbb{Z}}; X_i, \Delta_i)) \end{array}}$$

よって D の compact化を D' とおくと

$$D' \in |\mathcal{O}(w_1, \cdots, w_d)|.$$

よって

$$\mathrm{lct}(D'; \prod_{i=1}^{d} (\mathbb{P}^1, b_i 0)) \geq \mathrm{lct}(|\mathcal{O}(w_1, \cdots, w_d)|; \prod_{i=1}^{d} (\mathbb{P}^1, b_i 0)) \underset{\text{product formula}}{\geq} t \quad \square.$$

No.
Date 12-①

X_Σ : projec. Toric var

$\mathcal{L}$: Torus inv. $\mathbb{Q}$- Cartier divisor s.t. $|n\underline{\mathcal{L}}| \neq \phi$
Car
$\| \quad \quad (\Leftrightarrow P_{nL} \neq \phi)$
$\Sigma l_i \underline{E_i}$
the Torus inv. divisors
$\{m \in \mathbb{R} \mid \langle m, e_i \rangle \geq -nl_i\}$
E_iに対応する primitive vector

P_{nL} は$\mathbb{R}$で考えていればいい

Rem!
$\kappa(\mathcal{L}) \geq 0 \Leftrightarrow P_L \neq \phi$ となる

さらにこれから

Prop 5 E_i : Torus inv. divisor

$$W_{E_i}(\mathcal{L}) = \max_{m \in P_L} \langle m, e_i \rangle + l_i$$

∵ Recall

$$W_E(\mathcal{L}) = \sup \left\{ \frac{\mathrm{mult}_E(D)}{m} \,\middle|\, n|k, \ \underset{0}{\overset{\vee}{D}} \in |k\mathcal{L}| \right\}$$

$$= \sup_{n|k} \left\{ \frac{W_E(|kL|)}{k} \right\}$$

前回の Lem 3 より $W_E(|kL|) = \max_{m \in P_{kL} \cap M} \langle m, e_i \rangle + l_i$
$(n|k)$

よって $\dfrac{w_E(|k\mathcal{L}|)}{k} = \max\limits_{m \in P_{kL} \cap M} \langle \frac{m}{k}, e_i \rangle + l_i$

(したがって ≦ は ただちにしたがう

≧ も m が $\mathbb{Q}^d$ でとれればok

∵ P_L は有理点を頂点にもつ Polytope である ことからしたがうはず ← これはどうやって示す?

↑

X_Σ は proper だから

$H^0(X, \mathcal{L}) = \bigoplus\limits_{P_L \cap M \ni m} \mathbb{C}\chi^m$

より

P_L は有界になる → Polytope.

よって次を得る

上と同じ Notation の下 $\Delta = \Sigma b_i E_i$

Thm 6 $lct(|\mathcal{L}|_{\mathbb{Q}}; X, \Delta) = \min\limits_{E_i} \gamma_{E_i}(\mathcal{L}; X, \Delta)$

次に $lct(|\mathcal{L}|_{\mathbb{Q}}; X, \Delta)$ は ある divisor $\chi^m + L$, $m \in M_{\mathbb{Q}} \cap P_L$ で compute される.

∵ $lct(|\mathcal{L}|_{\mathbb{Q}}; X, \Delta) := \inf \left\{ lct(D; X, \Delta) \,\middle|\, \underset{0}{\overset{\forall}{D}} \in |n\mathcal{L}|_{n/k} \right\}$

$\underset{\text{前Prop4}}{=} \min\limits_i \gamma_{E_i}(\mathcal{L}; X, \Delta) = \min\limits_i \dfrac{1-b_i}{w_{E_i}(\mathcal{L})}$

これで $|\mathcal{L}|_{\mathbb{Q}}$ ひき出したが スケールをつけ $|\mathcal{L}|$ が入って考えないで $|\mathcal{L}|$ のいた分けでよい

Lyrel

$= \min\limits_i \dfrac{1-b_i}{(\max\limits_{m \in P_L} \langle m, e_i \rangle + l_i)}$

よって $\chi^m + \mathcal{L} \geq 0$ で $lct(|\mathcal{L}|_{\mathbb{Q}}; X, \Delta)$ が compute される.

Cor 7 同上の仮定の下 & $\mathcal{L}$ is movable.

$$lct(|\mathcal{L}|_{\mathbb{Q}}; X, \Delta) = \sup\{t \geq 0 \mid t(P_{\mathcal{L}} - P_{\mathcal{L}}) \subseteq P_{-(K_X+\Delta)}\}$$

(pf) $t(P_{\mathcal{L}} - P_{\mathcal{L}}) \subseteq P_{-(K_X+\Delta)}$

$\underset{\text{by def}}{\iff} \forall m, m' \in P_{\mathcal{L}},\ t(m' - m) \in P_{-(K_X+\Delta)}$

$\underset{\text{by def}}{\iff} \forall m, m' \in P_{\mathcal{L}}, \forall i, \langle t(m'-m), e_i\rangle + (1-b_i) \geq 0$

$\iff t(m-m').e_i \leq 1-b_i \quad \forall m, m' \in P_{\mathcal{L}}, \forall i$

$\iff t W_{E_i}(\mathcal{L}) \leq 1-b_i$

よって $\sup\{t \mid \text{as above}\} = lct(|\mathcal{L}|_{\mathbb{Q}}; X, \Delta)$ by Thm 6.

$t \sup_{m,m' \in P_L} (m-m').e_i \leq 1-b_i \quad \forall i$

$$\sup_{m,m' \in P_L} \langle m-m', e_i\rangle = \max_{m \in P_L} \langle m, e_i\rangle + l_i - \left(\min_{m' \in P_L} \langle m', e_i\rangle + l_i\right)$$

$$\underset{\text{by Prop 5}}{=} W_{E_i}(\mathcal{L}) - \left(\min_{m' \in P_L} \langle m', e_i\rangle + l_i\right)$$

今 $\min_{m' \in P_L} \langle m', e_i\rangle + l_i = \inf\left\{\frac{\mathrm{mult}_{E_i}(D_k)}{k} \,\middle|\, k \geq 1\ D_k \in |kL|\right\}$

より $\mathcal{L}$ は movable なので $\min_{m' \in P_L} \langle m', e_i\rangle + l_i = 0$ となる □

Cor 7より $L = -(K_X + \Delta)$ nef & big, klt

$\square := P_{-(K_X+\Delta)}$: polytope 幾何に抽象化することができる.

§. 凸体の幾何

$V = \mathbb{R}$ として $\square \neq \emptyset \subseteq V$ を convex set とする. i.e.,
(凸集合)

Def
$x, y \in \square$
$\forall t \in [0,1]$
$tx + (1-t)y \in \square$ 的に

Ambro のオリジナルの論文は
$\gamma(p \in \square) := \sup\{t \geq 0 \mid p + t(\square - \square) \subseteq \square\}$
としていたが今回はこれだけあつかう

Def $p \in \square$ fix

$$\downarrow$$

$$\gamma(\ \square) := \sup\{t \geq 0 \mid t(\square - \square) \subseteq \square\}.$$

Note. $\gamma(\ \square) = 0 \iff 0 \notin \square$ の relative interior. (レポ)

・ $\square := P_{-(K_X+\Delta)}$; klt $\Rightarrow 0 \in \square$
& $lct(|-(K_X+\Delta)|_{\mathbb{Q}}, X, \Delta) = \gamma(\square)$

$\because$ $\Delta = \sum b_i E_i$, $b_i < 1$

$\Rightarrow K_X + \Delta = \sum (-1+b_i) E_i$

$\rightarrow P_{-(K_X+\Delta)} \ni 0$ by def.

Note. Toric pair (X, Δ)

(X, Δ) : klt $\iff -(K_X+\Delta)$: big.

・Nef は Cartier data から定まる support function の convexity により特徴付けられるのでもっと複雑.

非対称係数

$\dim D = \dim V = d$, $p \in D$ a relative interior
を仮定する.

このとき $n \in V \setminus 0$
$p + l_n^+ n \in \partial D$ ← Dのboundary
$p - l_n^- n \in \partial D$
とする.

このとき

$$C(p \in D) := \sup_{n \in V}\left\{\frac{l_n^+}{l_n^-}\right\} \text{ として.}$$

これをDについての非対称係数と呼ぶ

Ambroのオリジナルは $C(p \in D) := \sup_{n \in V}\left\{\frac{l_n^+}{l_n^-}\right\}$ で $l_n^+ n + p \in \partial D$, $-l_n^- n + p$ なり となるもの

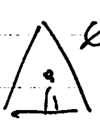
(Dのsimplexのときで
$D = \mathrm{conv}(e_0, \dots, e_d)$ 頂点
$0 = \sum r_i e_i$ とかいたとき
$\gamma(D) = \min_i r_i$)

Dがpolytopeのとき

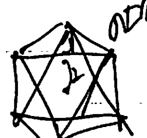
$C(p \in D) \geq 1$ で等号成立 $\Leftrightarrow$ Dはpで対称的

一方、$\gamma(D) = \sup\{t \mid t(D - D) \subseteq D\}$ だが

D−Dの図形的考察で



← 重心 $= D$ とすると



の頂点の位置 $= (D - D)$

よって $\gamma(D)$ は $\frac{1}{3}$ となる

Prop 8 $\dim D = \dim V = d$, $0 \in D$ の relative int.

$$\gamma(\ \cdot\ D) = \frac{1}{1 + C(0 \in D)}$$

∵) $C := C(0 \in D)$ として, $\gamma := \gamma(\ D)$

$\forall y, x \in D$ に対して, $\frac{1}{1+c}(x-y) = \frac{1}{1+c}(x) + \frac{c}{1+c}\left(-\frac{1}{c}y\right)$

今 $x \in D$ から $-\frac{1}{c}y \in D$ (by def of C)

(∵ $\ell^+ y \in \partial D$, $-\ell^- y \in \partial D$ と ℓ^+ と ℓ^- を定めると $\frac{\ell^+}{\ell^-} \le C$. したがって $\frac{1}{C} \le \frac{\ell^-}{\ell^+}$ で $-\ell^- y \in \partial D$ より $-\frac{1}{c}y \in D$ となる.)

D の convexity より $\frac{1}{1+c}(x-y) \in D$ となる. □

$\le$: v を $C(0 \in D) = c$ が与えられる vector とする. (compact だからそういう v がとれる)

$D - D$ の原点から v 方向への長さは $\ell_v^+ + \ell_v^-$ なので (このとき $\ell_v^+ = c\,\ell_v^-$ を $\mathcal{C}$ を与えている)

$t(D-D) \subseteq D$ のためには

$\ell_v^+ = c\,\ell_v^-$ より $t \le \frac{\ell_v^-}{\ell_v^+ + \ell_v^-}$ は必要 (そうでないと $t\cdot(-v) \notin D$)

$$= \frac{1}{1+c} \quad \square.$$

The simplex trick

カラテオドリーの定理 (cf. Wikipedia)

$P \subseteq \mathbb{R}^d$

$C :=$ P の convex hull とする.

定義: $\left\{ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i \;\middle|\; \sum \lambda_i = 1 \ \& \ \lambda_i \geq 0 \right\}$

$x \in C$

$\Rightarrow \exists r \leq d$ & $\exists x_0, \dots, x_r \in P$

s.t. $\cdot\ \mathrm{Conv}(x_0, \dots, x_r)$: r-simplex

(i.e. $x_0 \sim x_r$ は $r-1$ 次元(アフィン)の sub space に含まれない)

$\cdot\ x \in \mathrm{Conv}(x_0, \dots, x_r)$

∵ $x = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j x_j$ という $x_j \in P$, $\sum \lambda_j = 1$ & $\lambda_j \geq 0$

とかける (by def of convex hull)

$k \leq d$ なら示すことはないので $k \geq d+1$ を仮定する.

$\rightsquigarrow$ $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$ は線型従属なので,

$\rightsquigarrow$ $\exists \mu_j$ s.t. $\sum_{j=1}^{k} \mu_j (x_j - x_0) = 0$ となる.

($\mu_1 \sim \mu_k$ のどれかは0でない)

$\mu_0 := -\sum_{j=1}^{k} \mu_j$ とおくと,

$\sum_{j=0}^{k} \mu_j x_j = 0$ かつ $\sum_{j=0}^{k} \mu_j = 0$ となる.

$\alpha := \min_{0 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} \;\middle|\; \mu_j > 0 \right\}$

$\rightsquigarrow$ $\lambda_j - \alpha \mu_j \geq 0$ & $\exists i$ $\lambda_i - \alpha \mu_i = 0$

よって $x = \sum_{j=0}^{k} (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j$

$$= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j$$

とひとつへらせた。よって Induction より カラテオドリーの定理が示せた。

$\square$

このカラテオドリーの定理を用いて次を示す。

Prop 9. $\square$: 0を内点に含む polytope

$\exists p_0, \dots, p_r \in \square$ の vertex s.t. $\underbrace{\mathrm{Conv}(p_0, \dots, p_r)}_{=S}$ は simplex.
$r \leq d$

& $C(0 \in \square) \leq C(0 \in S)$

∵ まず $C(0 \in \square) = \frac{h_v^+}{h_v}$ となる v は vertex である。

なぜなら Prop 8 の証明より h_v は $\partial\square$ 上。よって $\square$ は polytope

$\gamma(\square - \square) \cap \square$ は $\gamma(\square - \square)$ の face の union.

よって $\gamma(\square - \square)$ の vertex が $\partial\square$ 上にある。

よって $\square$ が $-\square$ の vertex のスカラー倍が $\partial\square$ 上にあることになり、

それを v, $-v$ とすればよい。

$\partial\square \ni -h_v v$ を rel. int に含む face $F \subseteq \square$ をとってくる。

この $F \ni -h_v v$ に対して カラテオドリーの定理を適用してやると

$S_F \subseteq F$ simplex s.t. $-h_v v \in S_F$ の rel. int.

よって $\underbrace{\mathrm{Conv}(v, S_F)}_{=S}$ は dim より simplex となり 題意をみたす。$\square$

§§ Dual Polytope. ← polytopeはよい discrepancy をあつかいやすい

Def $\Box^* = \{ v^* \in V^* \mid \langle v^*, v \rangle + 1 \geq 0 \ {}^\forall v \in \Box \}$.

Thm (Duality theorem) $\Box$: polytope & $\mathrm{Int}(\Box) \ni 0$:

$\Longrightarrow \Box^{**} = \Box$

文献によっては

$\Box^\circ := \{ v^* \in V^* \mid \langle v^*, v \rangle \leq 1 \ {}^\forall v \in \Box \}$

を $\Box$ の polar set と呼ぶ

$\Box^* = -\Box^\circ$ とする.

($\Box^{\circ\circ} = \Box$ と同値な主張)

(証)

$\Box \subseteq \Box^{**}$ は

$\Box^{**} = \{ v \in V \mid \langle v^*, v \rangle + 1 \geq 0 \ {}^\forall v^* \in \Box^* \}$

より明らか.

逆を示す. もし $\exists p \in \Box^{**}$ s.t. $p \notin \Box$ となると.

$\exists H$: hyperplane $\subseteq \mathbb{R}^d$ s.t. $p \notin H$ & $H \cap \Box = \phi$

$H = \{ x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot v = 1 \}$ for some $v \in V^*$

というのがある. (厳密には hyperplane separation Lemma とかいう線型代数の帰結をつかう)

今, $v \cdot y > 1$ から ${}^\forall k \in K$, $v \cdot k \leq 1$ とになるので,

↓

$v \in \Box^*$

一方, $y \in \Box^{**} \Rightarrow p \cdot y \leq 1 \ {}^\forall p \in \Box^*$

よって矛盾である

§§ Dual Polytope つづき.

$\square$: polytope.

Def $\square^* = \{ n^* \in V^* \mid \langle n^*, n \rangle + 1 \geq 0 \ {}^\forall n \in \square \}$

Thm (前回示した) [Duality thm]
$\square^\circ \ni 0$ ← rel.int

$\Rightarrow \square^{**} = \square$

$\gamma(\square) := \sup \{ t \geq 0 \mid t(\square - \square) \subseteq \square \}$

$C(0 \in \square) := \sup \left\{ \frac{l_n^+}{l_n^-} \,\middle|\, \begin{array}{l} l_n^+ n \in \partial\square \\ -l_n^- n \in \partial\square \end{array} \ n \in \square \right\}$

$\underset{\substack{\text{前回示した} \\ 0 \in \square^\circ}}{\leadsto} \quad \gamma(\square) = \frac{1}{1 + C(0 \in \square)}$

Thm $C(0 \in \square^{**}) = C(0 \in \square)$

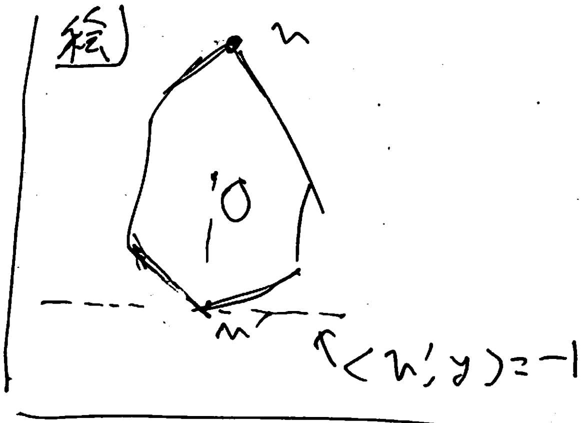
したがって $\gamma(\square) = \gamma(\square^{**})$

$\because$ Duality thm より

$C(0 \in \square^*) \geq C(0 \in \square)$ を示せばよい

$C(0\in\square)$ で計算する $v\in\partial\square$ をとり $v' := -\dfrac{v}{C(0\in\square)} \in \partial\square$ である.

$y\in V^*$ を $\langle y, v'\rangle = -1$ かつ $\forall x\in\square$ には $\langle y, x\rangle \geq -1$ となる y をとる



(これは $v'\in\partial\square$ ゆえできる)

このとき関数 $\langle y,\cdot\rangle : \square \longrightarrow \mathbb{R}$ は v で最大値 $C(0\in\square)$ をとる.

実際 $C(0\in\square) < \langle y, x\rangle$ という $x\in\square$ があるとすると.

$-\dfrac{l_x^-}{l_x^+}x \in \partial\square$

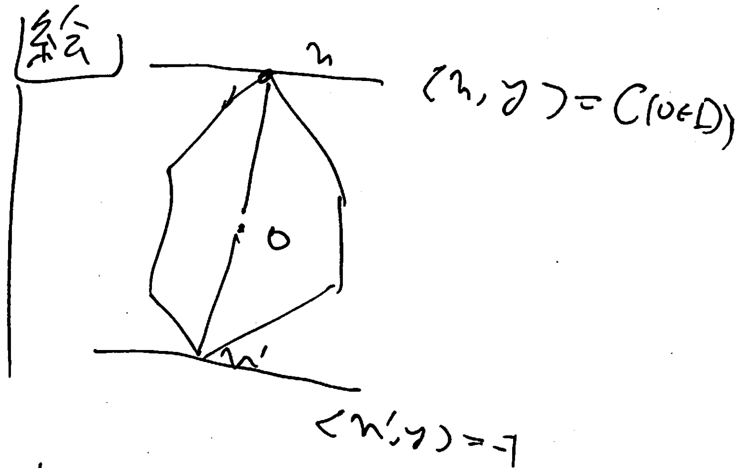
かつ $\langle y, -\dfrac{l_x^-}{l_x^+}x\rangle \geq -1$

$\langle y, x\rangle \leq \dfrac{l_x^+}{l_x^-}$

$\vee$

$C(0\in\square)$

よって 矛盾



よって y と $-\dfrac{y}{C(0\in\square)} \in \partial\square^*$,

だから

$C(0\in\square^*) \geq C(C(0\in\square)\square)$

↑ この証明は伊藤敦さんに教わった.

Thanks!

§ Discrepancy と Dual Moment polytope.

(X, B) を Toric (完全) pair とする. $K_X + B = \sum - a_i \underline{E_i}$ Toric inv. div

X_Σ

このとき $\sigma \in \Sigma$ に対し $\exists \psi_\sigma \in M_{\mathbb{Q}}$

s.t. $\langle \underset{\sim}{\psi_\sigma}, e_i \rangle = a_i$

$\mathbb{Q}$-Cartier data.

このとき

Thm (前回に示した)

totally discrep $(U_\sigma, X, B) = \min \{ \langle \psi_\sigma, e \rangle ; 0 \neq e \in N \cap \sigma \}$

$a(U_\sigma, B)$ と書くことにする

一方, モーメントpolytope

$\square := \square_{-(K_X+B)} = \{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, e_i \rangle + a_i \geq 0 \quad e_i \in \Sigma(1) \}$

に対し.

$h_\square(x) := \inf \{ \langle x, y \rangle \mid y \in \square \} \quad x \in N_{\mathbb{R}}$

(Support function と呼ばれる)

とする.

これで

$a(X, B) := \inf\limits_{E: 例外因子} a(E, X, B)$ はよくできる

Thm $-(K_X+B)$: ample のとき

$a(X, B) = - \sup\limits_{0 \neq e \in N} h_\square(e) = \inf \{ t > 0 \mid \{0\} \subsetneq N \cap t\square^* \}$

14-④.　　　　　　　　　　　　　　　　8-21

∵ $\Box^* = \mathrm{Conv}(\{\frac{e_i}{a_i}\}_{e_i \in \Sigma(1)})$ となる。← 演

$\rightsquigarrow \inf\{t>0 \mid e \in t\cdot\Box^*\} = -h_\Box(e) \quad e \in \Sigma(1)$

(∵ $-h_\Box(e) = \sup\{-\langle e, y\rangle \mid y \in \Box\}$ より

同値変形

$e \in t\Box^* \iff \langle \frac{e}{t}, y\rangle \geq -1 \quad \forall y \in \Box$

$\iff -\langle e, y\rangle \leq t$)

から(たがう) □.

一方.

$a(X, B) = -\sup_{0 \neq e \in N} h_\Box(e)$ となるので(1つ目のずれ ok)

∵ $a(X,B) = \min_{\substack{\sigma\in\Sigma \\ 0\neq e \in N\cap\sigma}} \langle \psi_\sigma, e\rangle = \min_{\substack{\sigma\in\Sigma \\ 0\neq e\in N\cap\sigma}} -h_\Box(e)$ □

$(-(K_X+B)$: s.a. $\rightsquigarrow -\psi_\sigma \in \Box$ 　$e_i \in \Sigma(1)$, $e_i \in \sigma$　$a_i = \langle\psi_\sigma, e_i\rangle$ より)

また $\Box + \psi_\sigma \subseteq \sigma^\vee$ より、$-\psi_\sigma \in \Box$ が $\langle -\psi_\sigma, e\rangle = h_\Box(e)$

$e \in N\cap\sigma$.

$\rightsquigarrow a(X,B) = -\sup_{0\neq e\in N} h_\Box(e) = \inf\{t>0 \mid \exists e\in N\cap\sigma, \exists\sigma\in\Sigma \text{ s.t. } e\in t\Box^*\}$ □

⇕

$0 \neq N\cap t\Box^*$

⇕ は clear

⇑ は. $e \in N\cap t\Box^*$ をとると.

Σ は complete なので

$\exists\sigma\in\Sigma$ で

$e\in\sigma$ となる.

$\mathcal{L}$: s.a. $= \sum a_i D_i$ 　a_i

Torus inv. ↓3 大 は bpf として用い.

$\Rightarrow \sigma \in \Sigma$ に対し.

$p := \bigcap_{\rho\in\sigma(1)} D_\rho$: Torus inv. pt.

$s \in H^0(X, \mathcal{L})$ で div(s) が p を通らないものとする.

$s \in \bigoplus_{m \in N\cap P_{\mathcal{L}}} \mathbb{C}\chi^m$ より $s = \chi^m$ と いう m がなるとしていい.

$\mathrm{div}_0(s) = \sum_{\rho\in\sigma(1)} \langle m, \rho\rangle D_\rho + a_i$ on U_σ

$\mathrm{div}_0(s)$ 〜 より $\langle m, \rho\rangle = 0$ $\rightsquigarrow m = \psi_\sigma$ ...

Thm 9 $q \in \mathbb{N}$, $1 \le c_1, \dots, c_d \le q$.
$x_1 \ge \dots \ge x_d > 0$

s.t. $\sum_{i=1}^{d} x_i \ge \sum_{i=1}^{d} \frac{q}{1+u_{i,q}}$

$x_i \ne \frac{q}{1+u_{i,q}}$ for some i を仮定する

$\Rightarrow$ $\exists z \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{d} \setminus 0$ s.t. $\frac{c_j z_j}{1+\sum_i c_i z_i} < x_j$ for $\forall j$
$(z_1, \dots, z_d)$

(いったんこの定理をみとめて. Thm (Toric) を示す.

Thm 10 (Toric)
(X, B): proj. Toric pair of dim d.
s.t. $-(K_X+B)$: ample (nef & big でok) & $a(X,B) \ge \frac{1}{q}$

$\Rightarrow$ $\alpha(|-(K_X+B)|_{\mathbb{R}}, X, B) > \frac{q}{u_{d+1,q}}$

(∵) $\square := P_{-(K_X+B)} := \{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, e_i \rangle + a_i \ge 0 \}$
$e_i \in \Sigma(1)$: primitive.
$-(K_X+B) = \sum a_i E_i$ $a_i > 0$ ← nef or big condition.

Cor 7 より $\alpha(|-(K_X+B)|_{\mathbb{R}}, X, B) = \delta(\square)$

さらに $\delta(\square^*) = \delta(\square)$ より

$\delta(\square^*) \ge \frac{q}{u_{d+1,q}}$ を示せばよい

背理法より $\gamma(\square^*) < \dfrac{g}{u_{d+1,g}}$ とする.

Simplex Technique (Prop 9) より

$\exists P_0, \cdots, P_r \in \square^*$ の vertex

s.t.
- $S := \mathrm{Conv}(P_0, \cdots, P_r)$ は simplex
- $r \leq d$
- $C(0 \in \square^*) \leq C(0 \in S)$

一般に Prop 8 より

$$\gamma(\square) = \frac{1}{1 + C(0 \in \square)}$$

だから

$$\gamma(0 \in S) \leq \gamma(0 \in \square^*) \text{ となる.}$$

$0 = \sum_{i=0}^{r} \gamma_i P_i$ $\quad \sum \gamma_i = 1,\ \gamma_i \geq 0$ と書いたとき. S が simplex の時は

$$\gamma(0 \in S) = \min_i \gamma_i \text{ となる. (レポ)}$$

したがって $\gamma_0 = \min_i \gamma_i$ と仮定すると.

$$\gamma_0 < \frac{g}{u_{d+1,g}}$$

今, e_i を $\Sigma(1)$ の primitive vector とおくと

$$\square^* = \mathrm{Conv}\left(\frac{e_0}{a_0}, \cdots, \frac{e_d}{a_d}\right)$$

となり 順をつけかえて

$$P_i = \frac{e_i}{a_i} \quad 0 \leq i \leq r \text{ としてよい.}$$

今, $r \le d$ より $u_{r+1,q} \le u_{d+1,q}$ となる.

よって $\gamma_0 < \dfrac{q}{u_{r+1,q}}$ とする.

$\longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \gamma_i = 1-\gamma_0 > 1 - \frac{q}{u_{r+1,q}} \underset{\text{Prop (1)}}{=} \sum_{i=1}^{r} \frac{q}{u_{i,q}+1}$

$\longrightarrow$ Thm 9 $\exists z \in \mathbb{Z}^d_{\ge 0}$, $z = (z_1,\dots,z_d)$ s.t. $\dfrac{q a_i z_i}{1+\sum_{j=1}^{r} q a_j z_j} < \gamma_i \quad (1 \le i \le r)$

&

$\gamma_i \ge q a_i z_i$ ← discrepancy の条件

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{q} > \displaystyle\max_{i=1,\dots,r} \frac{a_i z_i}{\gamma_i} - \sum_{j=1}^{r} a_j z_j$

$e := \displaystyle\sum_{i=1}^{r} -z_i e_i$ とすると ($e \ne 0$)

$\frac{a_1 z_1}{\gamma_1} = \displaystyle\max_{i=1,\dots,r} \frac{a_i z_i}{\gamma_i}$ とする.

$\displaystyle\sum_{i=0}^{r} \gamma_i \frac{e_i}{a_i} = 0$ より.

$\dfrac{\gamma_1}{a_1} e_1 = -\displaystyle\sum_{i \ne 1} \frac{\gamma_i}{a_i} e_i$

よって $e = \dfrac{a_1 z_1}{\gamma_1} \gamma_0 \dfrac{e_0}{a_0} + \displaystyle\sum_{i=2}^{r} \left(\frac{a_1}{\gamma_1} z_1 \cdot \frac{\gamma_i}{a_i} - z_i \right) e_i$ (≥ 0 ← max 性より)

一方, 凸結合のパラメーターの和の $\left\{\frac{e_i}{a_i}\right\}$ についての 1 は $\frac{a_1}{\gamma_1}\gamma_0 + \sum_{i=2}^{r} \frac{a_1}{\gamma_1} z_1 \gamma_i - z_i a_i$

$= \dfrac{a_1 z_1}{\gamma_1} - \dfrac{a_1}{\gamma_1} \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{\gamma_i} z_i \gamma_i$ ← $\sum_{i=0} \gamma_i = 1$

$=$ 不等式の右辺

$\longrightarrow qe \in S$ の rel.int.

一方, $a(X,B) \ge \frac{1}{q}$ より $\frac{1}{q} S \cap N = 0$ となり矛盾する. □

$a(X,B) = \inf\{t>0 \mid N \cap t\square^*\}$ ($N \ne 0$, tS) by 前のThm

§§ Geometry of Numbers

Thm 9 $q\in\mathbb{N}$, $1\le c_1,\dots,c_d\le q$

$$x_1\ge\dots\ge x_d>0$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{d} x_j \ge \sum_{j=1}^{d}\frac{q}{1+u_{j,q}}$$

もし $\exists i$ s.t. $x_i \ne \dfrac{q}{1+u_{i,q}}$

$$\Rightarrow \exists \underset{\underset{(z_1,\dots,z_d)}{\parallel}}{z}\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^d\setminus 0 \quad \text{s.t.} \quad \frac{c_j z_j}{1+\sum_i c_i z_i} < x_j \quad \text{for } \forall j$$

を示す。いくつか Lemma を準備する。

<u>Lem A</u> [Soundararajan] $d\in\mathbb{N}$ $x_1\ge\dots\ge x_d>0$ & $y_1\ge\dots\ge y_d>0$

s.t. $\prod_{i=1}^{l} x_i \ge \prod_{i=1}^{l} y_i$ for $1\le\forall l\le d$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{d} x_i \ge \sum_{i=1}^{d} y_i$$

& "$=$" $\Leftrightarrow$ $x_i=y_i$ $\forall i$

$$x_{d+1} := \min\{x_d, y_d\}\frac{y_1\cdots y_d}{x_1\cdots x_d} \quad \& \quad y_{d+1} := \min\{x_d, y_d\}$$

$\sum_i^r q_i + \sum_{i=r+1}^{r}\frac{c_i}{q} z_i r_i$

$\rightarrow$ $x_{d+1}\le x_d$ & $y_{d+1}\le y_d$ by 仮定

全てを同じ倍にしてもいいので $x_{d+1}\ge 1$ としてもよい。

($\rightarrow$ $x_i, y_i \ge 1$)

ここで次のムーアヘッドの定理を適用する。

Thm (ムーアヘッドの不等式) $0 \le a_d \le \cdots \le a_1$, $0 \le b_d \le \cdots \le b_1$

s.t. $\sum_{i=1}^{k} a_i \ge \sum_{i=1}^{k} b_i$ $k=1,2,\cdots,d-1$ かつ $\sum_{i=1}^{d} a_i = \sum_{i=1}^{d} b_i$

$x_1,\cdots,x_d \ge 0$ に対し

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \prod_{i=1}^{d} x_{\sigma(i)}^{a_i} \ge \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \prod_{i=1}^{d} x_{\sigma(i)}^{b_i} \quad \& \quad \text{“}=\text{”} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_i = b_i \ \forall i \\ \text{or} \\ x_1 = \cdots = x_n \end{array}$$

$a_i := \log x_i$ $b_i := \log y_i$ $x_1 = e, x_2 = \cdots = x_{n+1} = 1$ $d = n+1$ でムーアヘッドの不等式用いると、a_i, b_i は仮定をみたし結論を得る。

Lem A を用いて次を示す

Lemma A' $d, q \in \mathbb{N}$, $x_1 \ge \cdots \ge x_d > 0$

s.t. $\prod_{i=1}^{l} x_i \le 1 - q\sum_{i=1}^{l} x_i$ $\forall\, l \le d$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{d} x_i \le \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{1+u_{i,q}} \quad \& \quad \text{“}=\text{”} \Leftrightarrow \forall i \ x_i = \frac{1}{1+u_{i,q}}$$

(∵) $y_i := \frac{1}{1+u_{i,q}}$ として d についての Induction で

“$\sum_{i=1}^{d} x_i \ge \sum_{i=1}^{d} y_i \Rightarrow y_i = x_i \ \forall i$” を示す。

$d=1$ のとき $x_1 \le 1 - q x_1 \Leftrightarrow x_1 \le \frac{1}{1+q} = y_1$

$d>1$ のとき

$$\prod_{i=1}^{d} x_i \underset{\text{by 仮定 in Lem}}{\le} 1 - q\sum_{i=1}^{d} x_i \underset{\text{仮定 in “}\sim\text{”}}{\le} 1 - q\sum_{i=1}^{d} y_i \underset{\text{Prop (レポート)より}}{=} \prod_{i=1}^{d} y_i$$

今、l を $\prod_{i \ge l} x_i \le \prod_{i \ge l} y_i$ となる最大の自然数とする。

<u>$l=d$ のとき</u> $x_d \le y_d \longrightarrow \sum_{i=1}^{d-1} x_i \ge \sum_{i=1}^{d-1} y_i \xrightarrow{\text{induction}} x_i = y_i \quad 1\le i\le d-1$

$\sum_{i=1}^{d} x_i \ge \sum_{i=1}^{d} y_i$ だから $\xrightarrow[\text{となるが}]{x_d \ge y_d}$ $x_d = y_d$」

<u>$l<d$ のとき</u> l の maximality より $\prod_{i=l}^{k} x_i \le \prod_{i=l}^{k} y_i$ for $l \le {}^\forall k \le d$.

$\not=$ for $k<d$. $\left({}^\exists d \ge {}^\forall j > l \quad \prod_{i=j}^{d} x_i > \prod_{i=j}^{d} y_i \text{ だが} \right)$

$\xrightarrow[\text{Lem A}]{} \sum_{i=l}^{d} x_i < \sum_{i=l}^{d} y_i$

$\xrightarrow[\substack{\sum_{i=1}^{d} x_i \ge \sum_{i=1}^{d} y_i \\ \text{だから}}]{} \sum_{i=1}^{l-1} x_i > \sum_{i=1}^{l-1} y_i$ ξ to Induction 仮定 □

□

Lem B $T_1 \sim T_d$ を不定元とし ← これはエイガにしレポート問題にしていいかな。

$$\det \begin{pmatrix} 1+T_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+T_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 1+T_d \end{pmatrix} = \left(1 + \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{T_i}\right) \prod_{i=1}^{d} T_i$$

∵ d についての Induction で示す。
左辺を $\det_d$ とする。
$d=1$ のときは自明。

$d \ge 2$. $\det(\quad\sim\quad)$ は T_1 について1次式で $C_1(T_2, \cdots, T_d)T_1 + C_2(T_2, \cdots, T_d)$

とかける。C_0, C_1 は $T_2 \sim T_d$ の多項式

また $T_1 = 0$ を代入すると
$C_0 = \prod_{i=2}^{d} T_i$ とわかる。

15-④ $\quad \det_d = \det\begin{pmatrix} 1+T_1 & - \\ - & \ddots \end{pmatrix} = f(T_1, \cdots, T_d)$ $\quad$ 8-28

$\Rightarrow$ ~~$C_1 = f(T_1, \cdots, T_d) - f(T_1 - 1, T_2, \cdots, T_d)$~~

一方

$$\det\begin{pmatrix} 1+T_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+T_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & & 1+T_d \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} T_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+T_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & & 1+T_d \end{pmatrix} = C_1$$

となるので、左項を計算すると、左 $= \det_{d-1}$

$$T_1 \cdot \det_{d-1} = {}_d\det_{d-1}$$

よって $\quad \det_d = T_1 \cdot \det_{d-1} + \prod_{i=2}^{d} T_i \, \square .$

Lem B′ $\quad x_1, \cdots, x_d > 0$ & $c_1, \cdots, c_d \geq 1$ s.t. $1 - \prod_{i=1}^{d} x_i < \sum_{i=1}^{d} c_i x_i < 1$

$$\Longrightarrow \exists \underset{(z_1, \cdots, z_d)}{z} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d \setminus 0 \quad \text{s.t.} \quad \frac{z_j}{1 + \sum_i c_i z_i} < x_j \quad \text{for } \forall j .$$

☺

$$A := \begin{pmatrix} c_1 - \frac{1}{x_1} & c_2 & \cdots & c_d \\ c_1 & \ddots & & c_d \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_1 & \cdots & & c_d - \frac{1}{x_d} \end{pmatrix}$$

$$\|\underset{(v_1, \cdots, v_d)}{v}\|_\infty = \max_i \{|v_i|\}$$

$$U := \{ z \in \mathbb{R}^d \mid \|Az\|_\infty < 1 \}$$

$$\xrightarrow[\text{Lem B}]{} \det A = (-1)^d \frac{1 - \sum c_i x_i}{\prod_i x_i}$$

$$\xrightarrow[\text{仮定}]{} |\det A| < 1$$

← 分子は max norm での disc の体積

i.e. $\boxed{\times}$ の面積への一般化

$$Vol_{\mathbb{Z}^d}(U) = \frac{2^d}{|\det A|} > 2^d$$

Uは原点を対称なので ミンコフスキーの第1定理がつかえて

$x \in U \Rightarrow -x \in U$

$\exists z \in \mathbb{Z}^d \setminus 0 \cap U$

$\| (z_1, \ldots, z_d)$

$\rightsquigarrow \left| \sum c_i z_i - \frac{z_j}{x_j} \right| < 1 \quad \text{for } \forall j$

懐かしい

Thm（ミンコフスキーの第1定理）

Sが原点対称な convex set でJordan可測とする

$Vol(S) > 2^n \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$ s.t. $x \in S$

Uは原点対称なので z を $-z$ にとりかえて

$\sum c_i z_i \geq 0$ と仮定してよい

したがって

$\sum c_i z_i - \frac{z_j}{x_j} < 1 \longrightarrow \frac{z_j}{x_j} > -1 \quad (\Leftrightarrow z_j > -x_j)$.

一方, $c_i \geq 1 \longrightarrow \sum x_i < 1 \rightarrow x_j < 1 \rightsquigarrow z_j > -1 \rightsquigarrow z_j \geq 0$

したがって $z \in \mathbb{N}^d \setminus 0$

また

$-1 < \sum c_i z_i - \frac{z_j}{x_j} \Leftrightarrow \frac{z_j}{1 + \sum c_i z_i} < x_j \quad \forall j \quad \square$

proof of Thm 9

Prop（レポート）(3) より $\sum_{i=1}^{d} \frac{q}{1+q_{i,q}} < 1$

よって x_i と $l \in \mathbb{N}$ s.t. $\frac{\sum x_i}{l} < 1$ となる l をとり

$\sum_{i=1}^{d \vee q} \frac{q}{1+q_{i,q}}$

$\frac{x_i}{l}$ と x_i をとりかえて

$\sum x_i < 1$ と仮定してよい。

今, Lem A' を $\left(\frac{x_i}{q}\right)_i$ につかうと. 任意の, $1 \leq \exists l \leq d$

$$\prod_{i=1}^{l} x_i > \gamma^l \left(1 - \sum_{i=1}^{l} x_i\right)$$

$\rightarrow \prod_{i=1}^{l} x_i > \prod_{i=1}^{l} c_i (1 - \sum_{i=1}^{l} x_i)$.

$\rightarrow \exists z' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{l} \setminus 0$ s.t. $\dfrac{c_j z_j}{1 + \sum_{i=1}^{l} c_i z_i} < x_j$ for $1 \leq j \leq l$

Lem B' for $\left(\frac{x_i}{c_i}\right)$ $(z_1, \cdots, z_l)$

$z = (z', 0 \cdots 0) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d}$ とおけば Thm 9 が示される □

補足

① ミンコフスキーの第1定理の証明 (どこかの個人HPから証明を抜いた)

Lem S : convex, Jordan 可測で $vol(S) > 1$ とする

$\Longrightarrow \exists x, y \in S$ s.t. $x - y \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$

Sを〜ように ち〜 有界として良い

∵ $a = (a_1, \cdots a_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して

$Box(a) := \{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq a_i + 1 \quad 1 \leq i \leq n \}$

$S(a) := S \cap Box(a)$

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}^n} vol(S(a)) = vol(S)$$

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}^n} Vol(S(a) - a) = vol(S) > 1$$

$S(a) - a \subseteq Box(0)$ かつ $vol(Box(0)) = 1$ より

$\exists a, b \in \mathbb{Z}^n$ s.t. $(S(a) - a) \cap (S(b) - b) \neq \phi$ (ハトの巣原理)
$(a \neq b)$

$\rightsquigarrow \exists x \in S(a)\ \exists y \in S(b)$

s.t. $x - a = y - b$. □

ミンコフスキーの第1定理の証明

$$S' := \left\{ \left(\frac{x_1}{2}, \cdots, \frac{x_n}{2}\right) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, (x_1, \cdots, x_n) \in S \right\}$$

$\rightsquigarrow vol(S') > 1$

$\underset{\text{Lem}}{\rightsquigarrow} \exists x, y \in S'$ s.t. $x - y \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$

$$x - y = \frac{2x + (-2y)}{2} \quad \& \quad 2x \in S,\ -2y \in S$$

Sは原点対称 より

$\rightsquigarrow x - y \in S$. □

Date

⑨ ムーアヘッドの不等式 (これもネットでひろった証明)

証明 $x_1, \cdots, x_d$ のどれかは0でないとしてよい。

dについての帰納法で示す

$d=1$ のとき clear

$\exists i$ s.t. $a_i = b_i$ のとき、どうせ $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ についてたし上げるから
(式の対称性より)

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} x_{\sigma(1)}^{a_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{a_n} = \sum_{k=1}^{n} x_k^{a_i} \sum_{\sigma' : \{1, \cdots, \check{i}, \cdots d\} \to \{1, \cdots, \check{i}, \cdots d\}} x_{\sigma'(1)}^{a_1} \cdots x_{\sigma'(i-1)}^{a_{i-1}} \cdot x_{\sigma'(i+1)}^{a_{i+1}} \cdots x_{\sigma'(d)}^{a_d}$$

より
Induction の仮定より

$$\sum_{\sigma'} x_{\sigma'(1)}^{a_1} \cdots \underset{\text{除く}}{\cdots} x_{\sigma'(d)}^{a_d} \geq \sum_{\sigma'} x_{\sigma'(1)}^{b_1} \underset{\text{除く}}{\cdots} x_{\sigma'(d)}^{b_d}$$

より欲しい不等式を得る。

一方、$\forall i$ で $a_i \neq b_i$ のとき

$a_1 < b_1$ かつ $a_d > b_d$

より ある p が存在 $a_p < b_p$ かつ $a_{p+1} > b_{p+1}$.

今、u_iを次のように定める

$$\begin{cases} u_i = a_i & i \neq p, p+1 \\ u_p = b_p, \quad u_{p+1} = a_p + a_{p+1} - b_p & (\text{if } a_{p+1} - b_{p+1} \geq b_p - a_p) \\ u_p = a_p + a_{p+1} - b_{p+1}, \quad u_{p+1} = b_{p+1} & (\text{if } \quad " \quad < \quad " \ ) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad \sum^{d} a_i = \sum^{d} u_i \ \& \ \sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} u_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i \quad . \ k = 1, \dots, d-1$$

となる

$\{a_i\}$と$\{u_i\}$，$\{u_i\}$と$\{b_i\}$はともに等しい所が増えるので

既に示したcaseより

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} x_{\sigma(1)}^{a_1} \cdots x_{\sigma(d)}^{a_d} \geq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} x_{\sigma(1)}^{u_1} \cdots x_{\sigma(d)}^{u_d} \geq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} x_{\sigma(1)}^{b_1} \cdots x_{\sigma(d)}^{b_d}$$

したがってDoneである

<u>例1</u> $a_1 = \dots = a_{d-1} = 0$，$a_d = 1$，$b_1 = \dots = b_d = \frac{1}{d}$ ですから

$$(d-1)! \sum_{i=1}^{d} x_i \geq d! (x_1 \cdots x_d)^{\frac{1}{d}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} x_i \geq \sqrt[d]{x_1 \cdots x_d}$$

より相加相乗平均である。