§ Step 5 : $BAB_{d-1} \Longrightarrow BdVol_d$

$d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists\, v = v(d,\varepsilon) > 0$

s.t. X: ε-lc Fano

$\Longrightarrow vol(-K_X) < v$

$\quad \| $

$(-K_X)^d$

cf. Ching-Jui Lai "Weak BAB" to appear in BAB volume が Nice Reference で 歴史的背景がよく整理されている.

Proof 背理法で示す. 成り立たないとすると.

$\exists X_i$: ε-lc Fano of dim $= d$ s.t. $vol(-K_{X_i}) \nearrow +\infty$

$\mathbb{Q}$-factorization とることで X_i て $\mathbb{Q}$-fac ε-lc Weak Fano としてよい.

$\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ fix.

Claim A (必要ならば X_i の部分列をとりかえることにより)

$\exists a_i \searrow 0$ & $\exists B_i \geq 0$ s.t.
- $B_i \sim_{\mathbb{Q}} -a_i K_{X_i}$
- (X_i, B_i) : ε'-lc but Not ε''-lc for $\varepsilon'' > \varepsilon'$
- $vol(B_i) > (2d)^d$

∵ $v_i := vol(-K_{X_i})$

$a_i' := \dfrac{(2d)^d+1}{\sqrt[d]{v_i}}$ $\quad vol(-a_i' K_{X_i}) = (2d)^d + 1$

よって $\exists B_i' \underset{\mathbb{R}}{\sim} -a_i' K_{X_i}$ s.t. (X_i, B_i') NOT lc

$\rightsquigarrow s_i := \varepsilon'\text{-lct}(B_i', X_i; 0) < 1$ $\quad a_i := a_i' \cdot s_i < a_i'$ $\quad B_i := s_i B_i'$

よって $a_i < 1$ と仮定してよい。

$\rightsquigarrow -(K_{X_i}+B_i)$ ample

さらに (X_i, B_i) は exact に ε'-lc なら

$\exists\, X_i' \xrightarrow{\phi_i} X_i$: extraction or identity s.t. $a(D_i'; X_i, B_i) = \varepsilon'$

$X_i' \supset D_i'$

$K_{X_i'} + B_i' := \phi_i^*(K_{X_i}+B_i)$ & $K_{X_i'} + e_i D_i' := \phi_i^* K_{X_i}$

$(X_i, 0)$: ε-lc $\rightsquigarrow e_i \leq 1-\varepsilon$

$\longrightarrow \mu_{D_i'}(\phi_i^* B_i) = 1 - \varepsilon' - e_i \geq \varepsilon - \varepsilon' > 0$

$\overset{\shortparallel}{☆}$

次に (X_i', B_i') は まだ FT なので

$(-D_i')$-MMP : $X_i' \dashrightarrow X_i''$ を走らせ

$X_i'' \downarrow Z_i$

$X_i'' \to Z_i$ をその MFS とする.

Take $H_i \equiv (\frac{1}{a_i} - 1) B_i$ genl memb.

$\rightsquigarrow K_{X_i} + B_i + H_i \equiv 0$ & ε'-lc.

$\rightsquigarrow$ ・ $K_{X_i''} + B_i'' + (\frac{1}{a_i}-1)(\phi_i^* B_i)'' \equiv 0$ — (☆☆)

(☆ $\rightarrow$)' $\mu_{D_i''}(\frac{1}{a_i}-1)(\phi_i^* B_i)'' \ge (\frac{1}{a_i}-1)(\varepsilon-\varepsilon')$

ここから

<u>Case</u> $\dim Z_i > 0$
の場合を考える.

i.e.

部分列をとって

<u>Case</u> $\dim Z_i > 0$ $\forall i$ となる場合. (この場合は fiber に制限して DAB$_{d-1}$ を用いる

$F_i : X_i'' \longrightarrow Z_i$ の gen. fibre.

(☆☆)を F_i に制限すると, $D_i'' \twoheadrightarrow Z_i$ だから

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \cdot\ K_{F_i} + B_{F_i} + (\frac{1}{a_i}-1)(\phi_i^* B_i)''|_{F_i} \equiv 0 \\ \cdot\ \mu_{D''_{F_i}}(\frac{1}{a_i}-1)(\phi_i^* D_i)''|_{F_i} \ge (\frac{1}{a_i}-1)(\varepsilon-\varepsilon') \end{cases}$$

今, (F_i, D_{F_i}) は ε'-lc Fano なり (DAB$_{d-1}$ をつかうと

F_i は Bdd. よって $\exists H$: ample on bdd Fam.,

$$\underbrace{(\frac{1}{a_i}-1)(\varepsilon-\varepsilon')}_{\downarrow +\infty} \le (\frac{1}{a_i}-1)(\varepsilon-\varepsilon') D''_{F_i}\cdot H_{F_i}^{\dim F_i -1} \le \underbrace{-K_{F_i}\cdot H_{F_i}^{\dim F_i -1}}_{\text{定数}}$$

$\sim\to$ ムジュン.

よって ∞個の i について $d_i z_i = 0$ となるとしてよい

i.e. 部分列をとっても
$\forall i$ について $d_i z_i = 0$ i.e. $\rho(X_i'')=1$ と仮定してよい.

$$K_{X_i''} + D_i'' + \left(\frac{1}{a_i}-1\right)(\phi^*B_i)'' \equiv 0 \text{ から } \mu_{D_i''}((\phi^*B_i)'') \geq \varepsilon' - \varepsilon$$

$$\xrightarrow[\rho(X_i'')=1]{} \exists\, s_i \geq \frac{1}{a_i}(\varepsilon'-\varepsilon) \quad \text{s.t.} \quad K_{X_i''} + s_i D_i'' \equiv 0$$

①

この $s_i \nearrow \infty$ となることがわかる.

$$\to \mathrm{vol}(-K_{X_i''}) \geq \mathrm{vol}\left(\left(\left(\frac{1}{a_i}-1\right)(\phi^*B_i)''\right)\right)$$

$$\geq \mathrm{vol}\left(\left(\frac{1}{a_i}-1\right)\phi^*B_i\right)$$

$$\overset{\text{push, d次斉次}}{\geq} \left(2\left(\frac{1}{a_i}-1\right)d\right)^d$$

$$\to \mathrm{vol}(-K_{X_i''}) \nearrow +\infty$$

②

今, X_i と X_i'' を入れ替えて, (D_i は prime divisor)
X_i が①②をみたすとする.

Claim A の $\mathrm{vol}(-a_i K_{X_i}) > (2d)^d$ とすればいいので

lc center の deformation を考えることができる

i.e.

$x_i, y_i \in X$ general points, $\exists \underset{0}{\underset{\vee\!|}{\Delta_i}} \equiv -a_i K_{X_i}$

$\exists G_i \subseteq X_i$ s.t. G_i は (X_i, Δ_i) の exc. center で $x_i \in G_i$

(X_i, Δ_i) は y_i で non klt

$-(K_{X_i}+\Delta_i)$ は nef & big より

Connectedness Lemma を用いると、$\dim G_i > 0$ かつ $x, y \in G_i$ とならなければいけない。

また、$\{G_i\}_{x_i, y_i}$ は bdd family となっている。

↓ Adjunction process.

$F_i \xrightarrow{\nu} G_i$: the normalization

$$\rightsquigarrow K_{F_i} + \underbrace{\Theta_{F_i}}_{\text{the divisor}} + \underbrace{P_{F_i}}_{\text{the moduli} \rightsquigarrow \text{p.e.}} = \nu^*(K_{X_i} + \Delta_i)$$

By taking uniformally perturbation of Δ, we may assume P_{F_i} is big in particular $P_{F_i} \geq 0$

No. 21 - 8

Date

Notation Remark ν^2 て $|_{F_i}$ とかいてる.

F_i: general member でとる

$$F_i \not\subseteq \operatorname{Supp} D_i \text{ かつ } \mu_{D_{F_i}}(\Theta_{F_i} + D_i|_{F_i}) \geq 1$$

$$K_{F_i} + \Gamma_i := K_{F_i} + (\Theta_{F_i} + P_{F_i} + D_i|_{F_i}) \; (= (K_{X_i} + \Theta_i + D_i)|_{F_i})$$

今, $a_i' := a_i + \frac{1}{s_i}$ $\quad G_i := \Delta_i + D_i$ とおく

$$G_i \underset{\mathbb{Q}}{\sim} a_i'(-K_{X_i}) \; \& \; a_i' > 0$$

Note (F_i, Γ_i) は NOT klt $\left(\mu_{D_{F_i}}(\Theta_{F_i} + D_i|_{F_i}) \geq 1\right)$ だから.

今から この F_i について MFS を構成していく.

$$-(K_{F_i} + \Gamma_i) = (a_i' - 1)K_X|_{F_i} \text{ かつ } \quad a_i' > 0 \text{ から}$$

これは ample. が特異点は ムチャクチャ.

(resolution をとって適当に ε-lc になる boundary で log can. div が NOT p.e. になるものをつくり MFS をつくる

$$F_i' \xrightarrow[\mu_i]{} F_i : \text{log res of } (F_i, \Gamma_i).$$

$$K_{F_i'} + \Omega_i := \mu_i^*(K_{F_i} + \Gamma_i)$$

今, $\Sigma_i := \sum_{P:\text{prime}} \nu_P P$ as follows と定義する.

$$\nu_P = \begin{cases} 0 & \text{if } \mu_P(\Omega_i) \leq 0 \\ \min\{1-\varepsilon, \; \mu_P(\Omega_i)\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow (F_i', \Sigma_{F_i'})$: ε'-lc :

今, $K_{F_i'} + \Sigma_{F_i'} = \mu_i^*(K_{F_i} + T_i) + E_i' - N_i'$, $E_i' \geq 0$, $N_i' \geq 0$

· $E_i' \cap N_i' = \emptyset$

· E_i': μ_i-exc.

· N_i' ∩ comp ∩ Ω_i の係数は $1-\varepsilon'$

とかける (by def of $\Sigma_{F_i'}$)

Run an MMP for $(F_i', \Sigma_{F_i'})/F_i$:

$$\begin{tikzcd} F_i' \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & F_i'' \arrow[d, "\mu_i''"] \\ & F_i \end{tikzcd}$$

Ω_i''

the negativity $\rightsquigarrow$ $E_i'' = 0$ $\longrightarrow$ $K_{F_i''} + \Sigma_{F_i''} + N_i'' \equiv \mu_i''^*(K_{F_i} + T_i)$

$E_i'' = (E_i')_{F_i''}$, $N_i'' = (N_i')_{F_i''}$

(F_i, T_i) is NOT klt $\rightsquigarrow$ $\underline{N_i'' \neq 0}$

今, $H_{F_i''} \sim -(\mu_i'')^*(K_{F_i} + T_i)$: s.a. fbj ; gen. member, $H_{F_i''} \geq 0$

s.t. $(F_i'', \Sigma_{F_i''} + H_{F_i''})$: ε'-lc

$\rightsquigarrow$ $K_{F_i''} + \Sigma_{F_i''} + H_{F_i''} \sim_{\mathbb{R}} -N_i'' \neq 0$: NOT p.e.

$$\begin{array}{l} F_i'' \dashrightarrow F_i'' \\ \qquad\qquad \downarrow \; : \mathrm{MFS.}\ \text{of}\ (F_i'', \Sigma_{F_i''} + H_{F_i''}) \\ \qquad\qquad S_i'' \end{array}$$

次のような図式が得られる. (cf. Lai の work BAB)

$$\left(\begin{tikzcd} G_i \arrow[d] \arrow[dr, bend left] & F_i \arrow[l, "\nu"'] & & F_i' \arrow[ll, "\mu_i"'] \arrow[d, dashed, "(K_{F_i'}+\Sigma_i)\text{-MMP}"] \\ X_i \arrow[r, leftrightarrow] & \Sigma_i \arrow[d, "\text{cong fam}"] & & F_i'' \arrow[ull, "\mu_i''"] \arrow[r, dashed] & F_i'' \arrow[d, "\mathrm{MFS.}", "K_{F_i''}+\Sigma_i''+H_{F_i''}"'] \\ & T_i & & & S_i'' \end{tikzcd}\right)$$

今、X_i にもどり

$$K_{X_i}|_{F_i} = K_{F_i} + \Delta_i \quad : \text{sub } \varepsilon\text{-lc} \text{ とおく.}$$

$$K_{F_i'} + \Delta_{F_i'} := \mu_i^*(K_{F_i} + \Delta_i) \ : \ \text{sub } \varepsilon\text{-lc.}$$

By def, $\Delta_{F_i'} \leq \Omega_i$ (Recall $K_{F_i'} + \Omega_i = \mu_i^*(K_{F_i} + \Gamma_i)$)

$$\Omega_i - \Delta_{F_i'} = \mu_i^*(K_{F_i} + \Gamma_i - (K_{F_i} + \Delta_i))$$

$$= \mu_i^*(((K_{X_i} + G_i + D_i)|_{F_i} - K_{X_i}|_{F_i})$$

$$= \mu_i^*((\underbrace{\overset{G_i}{\Delta_i} + D_i}_{\equiv\, -a_i K_{X_i}})|_{F_i}) \equiv a_i' s_i\, \mu_i^*(D_i|_{F_i})$$

$\Uparrow$ $(\star\star)$

一方、C を N_i''' の comp となると C は S_i'' 上 ample.

さらに $\mu_C(\Omega_i''') > 1-\varepsilon'$ より $\mu_C(\Omega_i'' - \Delta_i'') \geq \varepsilon - \varepsilon'$

Ω_i の F_i''' への push　　ε-ball の boundary の push だから

さらに一方. $K_{X_i} + s_i D_i \equiv 0$ から

$$K_{X_i} + G_i + s_i(1-a_i) D_i \equiv 0$$

$$\Rightarrow K_{F_i'} + \Omega_i + \left(\frac{1}{a_i} - 1\right)(\Omega_i - \Delta_i) \equiv 0$$

※※※

$$\Rightarrow K_{F_i'''} + \underbrace{\Omega_i''}_{\geq 0,\ < \text{ by ※※※}} + \left(\frac{1}{a_i} - 1\right)\underbrace{(\Omega_i'' - \Delta_i'')}_{\geq 0} \equiv 0$$

$(BAD)_{a<1}$ より $F_i''' \longrightarrow S_i''$ の fiber は bdd.

C は $\left(\frac{1}{a_i} - 1\right)(\Omega_i'' - \Delta_i'')$ の comp. で

けー方は $\left(\frac{1}{a_i} - 1\right)(\varepsilon - \varepsilon')$ 以上

$\dim Z_i > 0$ のときと同じ議論で

矛盾が出る □

これで step 5 が完了.