§ Step 2 : bddness of Complements.
(このSectionは玉原での勉強会のノートが元になっている)

Thm (Bdd Comp d)
$d \in \mathbb{N}$, $R \subseteq [0,1] \cap \mathbb{Q}$ finite $\exists n = n(d, R)$
s.t. for $X \xrightarrow{f} Z$ proj mor. s.t. $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$ & X, : normal
s.t. $\cdot (X, B)$: lc of $\dim = d$
$\cdot B \in \Phi(R)$
$\cdot X$: of Fano type $/ Z$
$\cdot -(K_X + B)$: f-nef
$\Longrightarrow \forall z \in Z$, $\exists B^+ \geq B$
s.t. $n(K_X + B^+) \underset{U}{\sim} 0$ for $\exists U \ni z$ open
$\cdot \forall \, | n$

証明の方針.

dim Z>0のときに限定した Thm (Bdd Comp d) と Thm (local Comp d)
dim Z=0 〃 Thm (Global Comp d)

とする.

まず
本質的に Shokurov - Prokhorov の "Complement II" より

Thm Global Comp d-1 + Thm local Comp d-1 ⟹ Thm local Comp d

は知られていた (証明は紹介しようと思う)

No. 7-②

Date

したがって Thm (Global Cmpd) をいかに Induction を用いて証明するかがキーとなる。

ただし、X は Fano-type なので、Mori fiber space を用いられる。

しかし $X \xrightarrow{f} T$: MFS としたとして Thm (local Cmpt) を用いて

$K_X + {}^{\exists}B^+ \sim_f 0$ みたいなのがつくれたとする

Canonical bundle formula からわかるように

$\exists \Gamma_T \geq 0$ $\exists M$: b-nef div on T.

s.t. $K_X + B^+ \sim_f K_T + \Gamma_T + M$.

$\Gamma_T = \sum(1 - \mathrm{lct}_P(X, B^+))P$ という形なので (f^*P)

B^+の　はDCCとか hyperstandard of a finite set とかにコントロールができる。

問題は M である。

Ambro の定理 (実際は使わないで最終的には証明された)

から $M \sim B' \geq 0$ s.t. $(X, B^+ + B')$: klt (もし (X, B^+) が klt ならば)

とかがわかるが Bのしたホーは Control できる

一応 Shokurov 予想の1つで M が b-s.a. でしかも effective b-b.p.f になるとしているが、これはとてつもなくムズカシイと思われている。

したがって、この辺りを overcome するためには、
Mをそのまま扱う必要がある。

⟶ generalized pair の導入と Complement の理論を generalized pair へ拡張する。

Def: $(X, B+M)$: generalized pair $/Z$ とは、次の組のことを言う

$X' \xrightarrow[\phi]{\text{bir. proj}} X \longrightarrow Z$ proj morph normal vars

M': $\mathbb{R}$-Cartier div on X'

B: $\mathbb{R}$-div ≥ 0 on X

s.t. · ϕ: birat.

· M': nef$/Z$

· K_X+B+M: $\mathbb{R}$-Cartier for $M = \phi_* M'$

Rem ϕ は higher birat. model に取りかえてよいので log res. とれる。

Def (Sing. of gen. pair) $\phi: X' \longrightarrow X$ log res. として $(X, B+M)$ が $\phi^*(K_X+B+M) = K_{X'}+B'+M'$ とおくと、

· gen. klt $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $B' < 1$

· gen. lc $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $B' \leq 1$

· gen. dlt $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (X, B): DLT

& {gen. non klt center of $(X, B+M)$} = {non klt center of (X, B)}

· gen. plt $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ gen dlt & $\lfloor B' \rfloor$: irr. for each conn.
(i.e. disjoint of irr. component)

次のように BdComp を gen. pair に拡張する。

Thm (Gl. Comp - g)$_d$

$d, p \in \mathbb{Z}_{>0}$, $R \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$: finite

$\Longrightarrow$ $\exists n = n(d,p,R) \in \mathbb{N}$ with $pI(R) \mid n$

s.t. if $(X, B+M)$: proj. gen. pair with $X' \xrightarrow{\phi} X$, $M' \to M$

- $B \in \Phi(R)$ & pM': Cartier
- X': Fano type.
- $-(K_X+B+M)$: nef

$\Longrightarrow$ $\exists B^+ \geq B$ s.t. $(X, B^+ + M)$: gen. lc

$n(K_X + B^+ + M) \sim_{\mathbb{Z}} 0$

↑これは Thm (Global Comp) よりも強い。

Rem Thm (Gl Comp - g)$_d$ の relative 版は必要ないが、for $\forall m \in \mathbb{N}$ ~~Open problem である~~ (~~2018/11/16 現在~~) それま

Moraga-F で解決済み!

次に考えられる手法として sub var への adjunction である。

一番自然な発想は elephant $P \in |-(K_X+B)|_{\mathbb{R}}$ に対して

K_X+B+P という対を考えることである。

こちらは K_X+B+P がどんな P をとっても klt のとき

一向に subadjunction がつかえないのでこまる。

実はそういう時、(X, B) を例外的な Fano 対と呼ぶ。

後々 gen. version が必要になるので generalized 版で定義したい

Def $(X, B+M)$: gen pair, lc, $-(K_X+B+M)$: ample ← gen. log Fano とよぶ

$(X, B+M)$ が例外的 exceptional とは $\forall P \in |-(K_X+B+M)|_{\mathbb{R}}$ に対して $(X, B+M+P)$ は gen. klt

実はこの例外的な場合の方が bounded が言いやすい。
(BAB for exceptional)

Thm $d, p \in \mathbb{N}$, $R \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$ finite

$$\Rightarrow \left\{ (X, B) \;\middle|\; \begin{array}{l} (X, B+\exists M) : \text{gen. log Fano} \\ \& \text{ exceptional} \\ \& \ pM' : \text{Cartier} \end{array} \right\}$$

↑ M の代わる上手いもの

は log bounded.

をまず示す。

よって 例外的のとき ⟶ bdd 性を用いて complement を構成
非例外的なとき ⟶ lc center を作って adjunction をうかい と vanishing thm を用いて Induction で bound をつけ 上に作って extension.

以上が証明のストラテジー・アイデアである

No. 17-⑥

Date ~~8-①~~

さって正確には次のStepで示す

Step A Thm(local Comp.)d + ~~Thm (Bdd of excep. pair)d~~ + Thm (BAB:

⟹ Thm (Global Comp.)d. for non exceptional pair

Step B Thm (Gl. Comp-g) d-1 + Thm (local Comp.)d + Thm (BAB gen

⟹ Thm (Bdd of excep.)d.
+
Thm (Gl. Comp.)d for excep. p

Step C (本質的にShokurov-Prokhorov)

Thm (Gl Comp.)d-1 + Thm(local Comp)d-1 ⟹ Thm (local Comp.)d

§§ Step A

証明

Step A-0 次の2つの特別な場合を示す ← ここはexceptionalとかかんけいない

Case 1 (Fibration Case)

Thm (local Comp)d + Thm (Global Comp-g)≤d-1

⟹ Thm Global Comp-g)d for (X, B+M) s.t.

- ∃X → V : contraction & dim V > 0
- $K_X+B+M \sim_{\mathbb{Q},V} 0$
- M is NOT big /V

Case 2 (Subadjunction Case)

Thm (Global Conj) $d-1$ $\Rightarrow$ Thm (Global Conj) d for

· $(X, B+M)$ s.t. $\left\{ \begin{array}{l} \cdot\ B \in \mathbb{R} \\ \cdot\ \exists P\ \&\ \exists \alpha \in (0,1) \\ \quad \text{s.t. } (X, T+\alpha M) \\ \quad\quad \text{gen. plt,} \\ \quad\quad \mathbb{Q}\text{-fac.} \\ \cdot\ -(K_X+T+\alpha M) : \text{ample} \\ \cdot\ S = \llcorner P \lrcorner \subseteq \llcorner B \rfloor \\ \quad \text{irr.} \end{array} \right.$

Rem! Case 2 と同じ証明で Step 6 で用いた

Thm (Global Conj version 2) が示 される.

Case 1 の証明に行く前に 少し MMP の準備をする

このCase 2 & Case 2 では Step B でもつかうので 必要 Step A, B の前に まとめておく

Thm (本質的に BCHM)

$(X, B+M)$: gen. klt & B : big

$\Rightarrow$ $(X, B+M)$ の scale 付き MMP は terminate する

⊙ これは M が b-nef なので

$B+M \sim \underset{\text{big}}{\Delta} \geq 0$ s.t. (X, Δ) : klt であるので BCHM が 直接つかえる

DLT b-up の証明 が同じ方向で works (Hacon cf: Fujino)

$\longrightarrow$ Thm $(X, B+M)$: gen. lc pair

$\Rightarrow \exists \varphi : (Y, B_Y+M_Y) \longrightarrow (X, B+M)$

s.t. , $\varphi^*(K_X+B+M) = K_Y+B_Y+M_Y$

(Y, B_Y+M_Y) : $\mathbb{Q}$-fac. gen. dlt

· exceptional は B_Y の disc. of $(Y, B_Y, M_Y) = 0$.

$-(K_X+B+M)$: nef のときは

実は Fano type condition は DLT b-up に 移る おかげ

<u>Lemma</u> ・$(X, B+M)$: gen. lc pair

・X: Fano type

・$-(K_X+B+M)$: nef

・$X'' \xrightarrow{\psi} X$ bir. s.t.

$$K_{X''}+B''+\underbrace{M''}_{\substack{\shortparallel \\ M' \text{の push forward}}} = \psi^*(K_X+B+M)$$

& $\mu_E B'' \geq 0$ ∀E: ψ-exc

(厳密には $X' \longrightarrow X$ は higher model に とりかえられるから $X' \longrightarrow X''$ としておいて M' は X' より X'' に push できる)

$\Longrightarrow X''$: Fano type.

∵ Γ を X を klt log Fano にする boundary とする.

$\psi^*(K_X+\Gamma) = K_{X''}+\Gamma''$ とおく.

$0<t<1$

$$\longrightarrow -(K_{X''}+(1-t)\Gamma''+tB''+tM'') \text{ nef \& big}$$

$$\shortparallel$$

$$-(1-t)\underbrace{(K_{X''}+\Gamma'')}_{\text{nef \& big}} + t(-\underbrace{(K_{X''}+B''+M'')}_{\text{nef}})$$

$\overrightarrow{p.l.}$ $1>t\gg0$ とる $(1-t)\Gamma''+tB''\geq 0$

より $(X'', (1-t)\Gamma''+tB''+tM'')$: gen. klt

$\leadsto X''$ of Fano type

授業ではCase 1とCase 2の証明は省く予定.

↓

Case 1とCase 2の場合に Thm (Global Comp - 9)$_d$ が証明できることを認めて一般の場合をCase 1 & 2に帰着させることを説明する

Case 1とCase 2はそれぞれ fibration の base や低い次元 subadjunction

をとってその低い次元上で Complement を構成すればいいので、Induction の仮定から それを作ればいいと思うと受け入れ易いと思う.

Sketch of the proof: (detail は later)

Step A-1　Bの係数の動く範囲を高々有限通りにおさえる.

これは Bを $\Theta = B^{\leq 1-\varepsilon} + \lceil B^{>1-\varepsilon} \rceil$ に置きかえる

$\in \Phi(R)^{\leq 1-\varepsilon} \cup \{1\}$: 有限

このため ・ε は X に依存しない元をとる必要がある

・(X, Θ) が仮定をみたすように Modify しないといけない.

これはStep Bにまわす.

Step A-2　$(X, B+M)$ が Non exceptional と仮定してよい. (ここは detail)

∵ $(X, B+M)$ が exceptional とする.

$\underset{\text{BAB for exc.}}{\Longrightarrow}$ (X, B) : log bounded.

$\underset{\text{PM' Cartier だが.}}{\Longrightarrow}$ $\exists n$, $-n(K_X+B+M)$: Cartier $\underset{\text{effective basept free thm}}{\leadsto}$ Global Comp - 9 d は $(X, B+M)$ について成り立つ. □

場合分けで Non exceptional の場合を示せばよいことが分かれば

Step A-3　・$(X, B+M)$: Not klt

・$K_X+B+M \underset{\mathbb{Q}}{\not\sim} 0$ or $M \underset{\mathbb{Q}}{\not\sim} 0$ の場合に帰着させる.

Idea. $(X, B+M)$: NOT excep.

$\rightsquigarrow$ $(X, B+tP+M)$: Not klt

gen. lc

となる $P \in |-(K_X+M+B)|_{\mathbb{R}}$

がみつけられる。

Rem! ここで tP のリーオーは Contrac… する必要がある (非自明 な…

一方. $K_X+D+M \sim_{\mathbb{Q}} 0$ から $M \sim_{\mathbb{Q}} 0$

$\Rightarrow K_X+B \sim_{\mathbb{Q}} 0$

より (X, B): … $\Rightarrow$ Done. である。

非自明

こlc

かつ B 定まる ← B のリーオーは有限ができないので

DAB spel ← DAB spel は lc ではつかえない のでもっと すべき とい…

のdivertic

Step A-4 Reduce to Step A-0. i.e. Case 1 or Case 2

非自明な摂動

・M: big $\Rightarrow$ M を parturb して $\rightarrow$ plt case $\rightsquigarrow$ Case 2

・M: Not big $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "M/W \text{ によるfib.}"] \arrow[d, "-(K_X+D+M) \text{ によるfib.}"'] & V \arrow[dl] \\ W & \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ Case 1 に帰着。

Detail

Step A-1

Claim a $\exists\, \varepsilon = \varepsilon(P, d, R) > 0$ s.t.

if take $\Theta := B^{\leq 1-\varepsilon} + \lceil B^{>1-\varepsilon} \rceil$

& Run $-(K_X + \Theta + M)$-MMP $\rightsquigarrow X''$

$\Rightarrow$ · $(X, \Theta + M)$: lc

· $-(K_{X''} + \Theta'' + M'')$: nef

· $(X'', \Theta'' + M'')$: lc

Claim $\Rightarrow$ Step 1 $\{$ $(X'', \Theta'' + M'')$ の complement は $(X, \Theta + M)$ の complement となり、これは (X, B) の complement となるので OK.

Proof of Claim a

背理法より $\exists\, \varepsilon_i \searrow 0$ s.t.

$(X_i, B_i + M_i)$: lc

$(X_i, \Theta_i + M_i)$: not gen lc

今 $B_i = (B_i)^{\leq 1-\varepsilon} + d_1 D_1 + \cdots + d_k D_k$: lc とおく.

$\Theta_i = (B_i)^{\leq 1-\varepsilon} + D_1 + \cdots + D_k$: NOT lc

$P_i := B_i^{\leq 1-\varepsilon} + D_1 + \cdots + D_{j-1} + t_j D_j + d_{j+1} D_{j+1} + \cdots + d_n D_n$: not klt

$t_j \geq 1-\varepsilon_i$ という j をみつけれる.

ACC for glct : t_j は lc threshold で $d_1 \sim d_k \in D(R)$

$\rightarrow$ t_j : ACC $> 1-\varepsilon_i$ 矛盾 $\rightsquigarrow$ (1) は OK. (3) も同じ

No. 8-⑥

Date

(2) ~~global ACC for g-pair~~

(1) と同じように、$-(K_{X_i}+B_i+M_i)$ is NOT p.e.

$\Rightarrow \exists X \dashrightarrow \exists X''$
$\downarrow \leftarrow K_{X_i}+B_i+M_i$-trivial
Z'' となる B_i をえらぶことができる

D_j は Z'' (general) fiber に制限すると Global ACC に矛盾する

Step A-2 Done (既に示みつ)

Step A-3 $\exists t \in [0,1)$, $\exists P \sim_{\mathbb{R}} -(K_X+B+M)$ s.t. $(X, \underbrace{B+tP}_{\Omega}+M)$ is NOT klt but lc.
$P \geq 0$

$(X'', \Omega''+M'')$
$\downarrow \varphi$ の DLT b-up とする.
$(X, \Omega+M)$

$\Theta'' := \Omega'' - t\{\varphi^*P\} \in R$

& $\lfloor \Theta'' \rfloor \neq 0$ 少数部分

前 Lem 1 $\rightarrow$ X'': FT.

$$-(K_{X''}+\Theta''+M'') = -(K_{X''}+\Omega''+M'')+t\{\varphi^*P\}$$
$$= \underbrace{(1-t)\pi^*P'}_{\text{semi-ample}} + t\{\varphi^*P\} \geq 0$$

$\rightsquigarrow$ $-(K_{X''}+\Omega''+M'')$:nef としてよい

$-(K_{X''}+\Omega''+M'')$-MMP

このMMPでつぶれるexceptionalはZariski分解を考えると $\mathrm{Supp}\{\varphi_* P\}$ に入る

よって ⌊Θ⌋ はつぶれない

$\longrightarrow$ $(X'', \Omega''+M'')$: NOT klt となる。

一方 lc が保たれるのは

$$K_X+\Omega+M+\underset{\substack{\sim_{\mathbb{Q}} \\ -(1-t)(K_X+B+M)}}{\underline{H}} \sim_{\mathbb{Q}} 0$$
H: general、かつ gen. lc より

$K_{X''}+\Omega''+M+\varphi_* H \sim_{\mathbb{Q}} 0$ も gen lc なので

$\longrightarrow$ $Θ \le \Omega''$ がしたがう。

したがって $(X, B+M)$: NOT KLT と仮定してよい

ここで1つ break として (とは言っても後につながるのだけど)

Def $(X, B+M)$: strongly non-exceptional

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $(X, B+M)$: gen. fg pm
$\exists P \sim_{\mathbb{R}} -(K_X+B+M)$ s.t. $(X, B+M+P)$ is NOT lc.
$P \ge 0$

Cor If $(X, B+M)$: strongly non-exceptional

$\Longrightarrow$ Step A-3 はOK.

∵ 上の証明から $t<1$ となり、$-(K_X+Θ+M) \sim_{\mathbb{R}} 0$ より OK. □

ソレヤワドイギリ…だが Step A-4 が Step A-3 の条件の多様体で示せるとすれば strongly non exceptional に対しては n-complement が存在しているとしてよい。

今、$K_X+B+M \sim_{\mathbb{Q}} M \sim_{\mathbb{Q}} 0$ と仮定してこの場合に

$\exists r = r(d, R, P) \in \mathbb{N}$ s.t. $r(K_X+B+M) \sim_{\mathbb{Z}} 0$ を目指す.

今、X: FT $\Rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$

$\Longrightarrow \underline{\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}}(X)}$: Torsion free

∵ $T \equiv 0$ & T: Cartier

$$h^0(T) = \chi(T) = \chi(\mathcal{O}_X) = 1$$

これはhigher model

$X', M' \longrightarrow (X, M)$

$\downarrow$

Pic X' も Torsion free

よって $\underset{\text{Cartier}}{\underline{pM'}} \sim_{\mathbb{Z}} 0$ より $pM \sim_{\mathbb{Z}} 0$.

よって pair (X, B) の lc Gorenstein index をおさえる問題におちるので、

問題は次のようにおきかわる.(が実際はこれを示すわけではない、Step 7 への帰着とみなす方)

(X, B): lc NOT Klt, $\mathbb{Q}$-fac, $\dim = d$

, $B \in R$ finite

・ X FT

・ $K_X + B \sim_{\mathbb{Q}} 0$

$\Longrightarrow \ ^{\exists} r = r(d, R) \in \mathbb{N}$ s.t. $r(K_X+B)$: Cartier

Rem! この条件から X の bdd は期待できない ⇐ (X, B) が lc なので

この条件の下

Claim $\exists \varepsilon = \varepsilon(d, R) > 0$ s.t.

D: X 上素因子に対して

$a(D, X, B) < \varepsilon \Longrightarrow a(D, X, B) = 0$

存在証明

① $\exists\, \varepsilon_i \searrow 0$ s.t. $a(D_i, X_i, B_i) = \varepsilon_i$ となるものがあるとする

$\rightsquigarrow$ D_i は $\underset{\underset{D_i}{\cup}}{Y_i} \to X_i$ で extract できる.

$\rightsquigarrow$ $(Y_i, \underbrace{B_i' + (1-\varepsilon_i)D_i}) : lc$ CY pair

$\mathbb{R} \cup \{1-\varepsilon_i\}_i : DCC.$

$\Rightarrow$ Finite by global ACC. 矛盾 □.

$Y \xrightarrow{\pi} X$ を $a(E, X, 0) < \varepsilon$ となる E を全て extract する.

$\rightsquigarrow a(E, X, B) = 0$

よって $\pi^*(K_X + B) = K_Y + \underbrace{\tilde{B} + \Sigma E_i}_{\mathbb{R}} : lc.$

$Y : \varepsilon\text{-}lc.$

X を Y にとりかえて示せば十分なので

X は ε-lc と仮定してよい. このとき次の Key Proposition より

$|-mK_X|$ が birational となる m が uniform にとれる.

Prop 2. $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta > 0$, $\exists m = m(d, \varepsilon, \delta)$ s.t.

X : d-dim ε-lc Fano s.t. $K_X + B \underset{\mathbb{Q}}{\sim} 0$ for some $B \geq \delta$

$\Rightarrow |-mK_X|$ defines birational map.

Step 3 で示す. ここでは complement の仮定が必要ないことに注意する.

(Bdd)

No. 8-10

Date

$$\phi : X' \to X$$

$|-mK_X|$: bg $\Rightarrow$ $\phi^*(-mK_X) \sim_{\mathbb{Z}} A' + R'$ (A': bpf, general; R': fixed)

$\Rightarrow -mK_X \sim_{\mathbb{Z}} \underset{\text{mov.}}{A} + \underset{\text{fixed.}}{R}$ integral

Claim C $(X, \frac{1}{m}A + \frac{1}{m}R)$ is lc

(∵) NOT lc $\Rightarrow$ X is strongly non-exceptional

$\Rightarrow \exists\, K_X + C^+$: m-complement of K_X

R は fixed pt で A は general より これは矛盾. □

今, $\Delta := \frac{1}{2}D + \frac{1}{2m}R$ $N := \frac{1}{2m}A$ とおくて

$$2m(K_X + \Delta + N) \sim_{\mathbb{Z}} m(K_X + B)$$

より pair $(X, \Delta + N)$ の $\mathbb{Q}$ Gor. index を bound すればいい

主C $(X, \Delta + N)$: klt $\Rightarrow$ $\varepsilon' := \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2m}\}$

$(X, \Delta + N)$ は ε'-lc

$\Rightarrow (X, \Delta+N)$: Bdd (ℚ)

BAB special.

(∵) $0 < a(D; X, \Delta + N)$

$= \frac{1}{2}\underbrace{a(D, X, D)}_{①} + \frac{1}{2}\underbrace{a(D, X, A+R)}_{②}$

① > 0 ⇒ ① ≥ ε by Claim a

② > 0 ⇒ ② ≥ $\frac{1}{m}$ by $m(K_X + \frac{1}{m}A + \frac{1}{m}R) \sim_{\mathbb{Z}} 0$ だから

よって $(X, \Delta+N)$: NOT klt としてよい

$\Longrightarrow \quad (X, \Delta + \frac{1}{2m}A)$: not gen. klt

$\frac{1}{2m}A \not\sim_{\mathbb{Q}} 0$ より Step A−3 の $M \not\sim_{\mathbb{Q}} 0$ の場合に帰着 Done.

多少細かくしなければならない

minimal な $N(K_X + \Delta + \frac{1}{2m}A) \equiv 0$ となる N がとれる 多分 Done

$\boxed{\text{Step A-3 Done}}$

Step A−4
$$\begin{cases} \cdot\ (X, B+M) : \mathbb{Q}\text{-fact dlt. not klt} \\ \cdot\ K_X+B+M \equiv_{\mathbb{Q}} 0 \ \text{ or } \ M \not\sim_{\mathbb{Q}} 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Reduce to Step A−0

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "M\text{-MMP}/Z"] \arrow[dr] & X'' \arrow[d] \arrow[r, "f"] & V \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

by $M_{X''}/Z$: nef/Z (semi-ample/Z) ↑ by Fujino Andreatta

by $-(K_X+B+M)$: semi-ample

よって X を X'' におきかえて Comp. を作ればよいので.

M : nef/Z を仮定してよい.

$\Longrightarrow \dim V > 0$ & $K_X+B+M \sim_{\mathbb{Q}, V} 0$

$M \not\sim_{\mathbb{Q}} 0$

もし M : NOT big / V $\Longrightarrow$ Step A−0 の Case 1 の場合に帰着される

No.
Date 9-②

今、M: big$/V$ を仮定してよい。

$\Longrightarrow$ f: birat. & M: big & nef$/Z$.

Claim D $\exists\, P$ on X s.t. $-(K_X+P+\alpha M)$: nlt & ample (globally) for $0<\alpha<1$

$\lfloor P\rfloor \subseteq \lfloor B\rfloor$

$\boxed{\text{Step A-0 Case 2}}$ より Claim D を示せばよい。

∵ 今、$-(K_X+B+\alpha M) = -(K_X+B+M) + (1-\alpha)M$.

: nef & big (globally)

$-(K_X+B+M)$ は Z 上 ample の引き戻し。
M は Z 上 big & nef
より εM $0<\varepsilon\ll 1$ にとれば
$-(K_X+B+M)+M$
は gl. nef & big
になることがすぐわかる。

Take $G \geq 0$
s.t. $-(K_X+B+\alpha M) \underset{\mathbb{Q}}{\sim} A + G$.

Supp $G \not\ni$ Non klt center of $(X, B+\alpha M)$ $\longrightarrow$ Claim D はこれから。 by perturb.

Supp $G \supseteq \exists$ Non klt center $\longrightarrow$ D を少し減らして G をとる。

実際、$-(K_X+B+\alpha M)$ による所の birational ではこれは V 上で…

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{bir}} & V' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & V \end{array}$$

$-(K_X+B+\alpha M)$ の像

よって
ここで V'上 B-MMP で Γ は CS させた後の model で Comp. をつければ十分

よって B :nef と仮定される。先の議論と同様に

$$-(K_X+\beta B+\alpha M):\text{nef \& big globally}$$

$\alpha<\beta<1$ ← これは klt.
とれる。

$$t:=\mathrm{lct}(\ G+(1-\beta)B,\ X,\ \beta B+\alpha M)\in(0,1)$$

$$\Omega:=\beta B+t(G+(1-\beta)B)$$

$$\rightsquigarrow\begin{cases}(X,\ \Omega+\alpha M):\text{lc NOT klt}\\ -(K_X+\Omega+\alpha M)\ \text{ample}\end{cases}$$

$$\|$$

$$-t\underbrace{(K_X+B+\alpha M)}_{\substack{\|\\ G+\underset{\text{ample}}{\underline{A}}}}-\underbrace{(1-t)(K_X+\beta B+\alpha M)}_{\text{nef}}-tG$$

<u>Sub Claim 1</u> $\{\text{Non-klt place of }(X,\ \Omega+\alpha M)\}$ for $1-\beta\ll1$

$\subseteq\{\text{Non-klt place of }(X,\ B+\alpha M)\}$

∵ もし $(X,\Omega+\alpha M)$ の Non klt place E にそこ
これ $(X,\ ~~B~~+\alpha M)$ の Non klt place でないとすると

$0<\beta\ll1$ をとることで その E は $\Omega+\alpha M$ の lc place からはずすことができる。さらにこれは1つの a_{exep} で行えばいいから
前回のようにできる。よって Sub Claim 1 は したがう。

No.
Date 9-④

Subclaim 3

$\lfloor\Omega\rfloor \neq 0 \Rightarrow$ $\lfloor\Omega\rfloor \subseteq \lfloor B \rfloor$ より 少しの perturbation により Claim D

の形にもっていける

$\lfloor\Omega\rfloor = 0$ のとき.

$(X'', \Omega''+\alpha M'') \xrightarrow{\pi} (X, \Omega+\alpha M)$: DLT b-up

$\Delta'' := p\,\pi_*^{-1}B + \sum_{exc/X} E \leq \Omega''$

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & X''' \arrow[d, "\pi'''"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$(K_{X''}+\Delta''+\alpha M'')$-MMP/$X$

を回すと minimal model は

X と同型

最後の div contr を $X''' \to X$ とする

S をその except. とすると $\pi'''^*(K_X+\Delta+\alpha M) + (1-\varepsilon)S$ anti-ample/X

$\rightsquigarrow$ $(X''', \Delta'''+\alpha M''')$: plt & anti-ample

$S'' = \lfloor\Delta''\rfloor \subseteq \lfloor\Omega''\rfloor \subseteq \lfloor B''_\alpha\rfloor$

ここで B''_α は $K_{X''}+\underset{\geq 0 \leftarrow \text{by subclaim}}{B''_\alpha}+\alpha M'' = \pi''^*(K_X+B+\alpha M)$

S. $K_{X''}+B''+M'' = \pi^*(K_X+B+M)$

Subclaim 2 $0 \leq B''_\alpha = B''$ $\rightsquigarrow$ $S'' \subseteq \lfloor B''\rfloor$ $\rightsquigarrow$ Case 2 に帰着

? $\left\{\begin{array}{l} B''_\alpha = \pi_*^{-1}B + \text{exc} \\ \Omega'' \geq \sum_{E:\text{exc}} E \\ \lfloor B''_\alpha\rfloor \geq \lfloor\Omega''\rfloor \text{ by subclaim} \end{array}\right.$ $\Longrightarrow$ $B''_\alpha = \pi_*^{-1}B + \sum_{E:\text{exc}} E$

$B'' = B''_\alpha + (1-\alpha)\underbrace{(\pi^*M - M'')}_{\geq 0 \text{ supported exc}} \leq 1 \Longrightarrow B'' = B''_\alpha$ □

ノート 説明構成がよくなかったので改善の必要あり!

Step B Thm(GL-Comp-g)$_{d-1}$ + Thm(bdd Comp)$_d$ + Thm(BAB special)$_d$

$\Longrightarrow$ Thm(Bdd of excep)$_d$.

実際次の形で示す

Thm (Bdd of excep)$'_d$

$d, p \in \mathbb{Z}_{>0}$, $R \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$ finite

$$\Rightarrow \left\{ (X,B) \,\middle|\, \begin{array}{l} \cdot (X, B+M) \text{ excep. with nef } -(K_X+B+M) \\ \cdot pM' : \text{Cartier}, \ X : \text{FT}, \ B \in \mathbb{I}(R) \end{array} \right\} = : \mathcal{P}$$

log bdd

Rem! Step A では実際 Bd Comp for non exceptional pair について証明している

次のようなストラテジーで証明する

Step B-1 まず上の Thm の special case として

これも Shokurov が予想していた

Thm (BAB for exceptional weak Fano)$_d$

{ X | d-dim exceptional weak Fano X } bdd.

この step で新しい MMP のテクニックがつかわれる. "MMP additional divisor"

Step B-2 ここで

M: big & $K_X+B+M \equiv 0$ の場合に帰着させる.

注意としてはここで B, M をとりかえているが X の bdd性さえわかれば B の bdd性は B の little-nef が uniform に下からおさえられているので $-(K_X+B+M)$ nef と合わせれば (X, B): log bdd はわかる

Step B-2 の帰結がわかって.

$X \overset{K_X\text{-MMP}}{\dashrightarrow} \underset{\text{weak Fano}}{X'}$ を考えると

X': non exceptional $\rightsquigarrow$ $\exists$ bdd cpl. by Step A

X': exceptional $\rightsquigarrow$ $\exists$ bdd cpl by Step B-1

よって $-K_X$ は bdd cpl を持つことが分かる. Rem ここでは対応する pair については何も言っていないことに注意.

$\rightsquigarrow$ Claim (1) $\mathrm{vol}(-K_X) <$ bdd

(2) $\forall l \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\exists t_l \in \mathbb{R}_{>0}$ s.t. $\left\{ \begin{array}{l} \forall (X,0) \in \mathcal{P} \\ \forall D \in |-lK_X| \\ (X, t_l D) \text{ klt} \end{array} \right.$

$t_l = t_l(d,p,\varepsilon)$

← 証明は非自明で後の Lem. F が必要など

(3) $\exists n = n(d,\varepsilon,p)$ s.t. $|-n\underset{\varepsilon\text{-lc}}{K_X}|$ defines a birational map.

これは Step 3 で:
示されるけーオーが大きい uniform bound な Compl とか, ε-lc Fano は どれくらい 有界 て と の に

以上から X のbddを示したかったが ここで Step 7で示したProp 1を用いる.

実際 ・X が n-comp. をもつこと

・$|-nK_X|$ def birat. map

・$\mathrm{vol}(-K_X) \le n$

・$\forall l>0$ $\forall D' \in |-lK_{X'}|$ $(X', \tau_l D')$: klt ← Lower bd of lct

を示したので X: bdd となる. □

よって Step B-1, Step B-2, Claim E, を示せばよい.

全体を通して次の Lemma が成り立つ

<u>Lemma F</u> $d, p \in \mathbb{N}$, $\Phi \subseteq [0,1]$: DCC

$\rightarrow$ $^\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $^\exists \beta \in (0,1)$

s.t. for ・$(X, B+M)$: excep. of dim d with $-(K_X+B+M)$: Nef

・X: FT

・$B \in \Phi$, pM': Cartier

$\Longrightarrow$ (F-1) $-(K_X+B+M) \sim_{\mathbb{R}} {}^\exists P \geq 0$ s.t., $(X, B+P+M)$: ε-lc

(F-2) $(X, B+\beta M)$: exceptional.

Date

Lemma Fから

Claim E はすぐわかる

実際、(1)(2)

F-(F) Step を使えばすぐにわかる。

(2) $t_\ell := \frac{1-\beta}{3dp\ell}$ とすれ

⇒ pM': nef big Cartier

$\longrightarrow K_{X'} + 3dpM'$ big

(MMP + Cone thm) $\xrightarrow{\text{push}} K_X + 3dpM$ big

一方、

$$-(K_X + B + t_\ell D + \beta M) \sim_{\mathbb{Q}} \underbrace{-(K_X+B+M)}_{\geq_{\mathbb{Q}} 0} + \frac{1-\beta}{3dp}\underbrace{(K_X + 3dpM)}_{\text{big}}$$

$$\sim_{\mathbb{Q}} {}^{\exists}P \geq 0$$

$(X, B+M)$: excep $\longrightarrow$ $(X, B + t_\ell D + P + \beta M)$: klt

$\Rightarrow (X, t_\ell D)$: klt

したがって Lem F, Step B-1, Step B-2, Step B-3 という順に示していく.

§§ MMP for K_X+B+M by adding D

設定 $(X, B+M)$: Lc & X : FT & $-(K_X+B+M)$: nef

$$D = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{b-nef} \\ \text{div}}}{N} + \underset{\substack{\vee\!| \\ 0}}{E}$$

Take $\tau := \sup\{t \geq 0 \mid -(K_X+B+tD+M) \text{ nef \& lc}\}$

- $\tau = \mathrm{lct}(D; X, B+M) \leadsto$ Stop
- $\underset{\leadsto\, <}{\tau \neq \mathrm{lct}(D; X, B+M)} \Longrightarrow \exists R$: ext. ray s.t. $\cdot\ K_X+B+\tau D+M \cdot R = 0$, $\cdot\ D \cdot R > 0$

  R det MFS $\leadsto$ stop

  R det divcont or flipping $\leadsto$ Continue.

<u>Note</u> これは普通の $-D$-MMP $\leadsto$ 必ずどこかで MFS に行く
∵ MMP

この MMP で

$$X \longrightarrow \bar{X} \quad \text{end model with} \quad \begin{cases} \bar\tau = \mathrm{lct}(\bar D; \bar X, \bar B + \bar M) \\ \text{or} \\ \bar X \text{ has MFS str.} \end{cases}$$

<u>Claim</u>
- $\kappa(K_X+B+\bar\tau D+M) \geq 0$
- $(K_X+B+\bar\tau D+M)_Y \leq (K_{\bar X}+\bar B+\bar\tau \bar D+\bar M)_Y$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \bar X \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & Y & \end{array}$$

<u>proof of Lem A-1</u> X: $\mathbb{Q}$-fac とは限らない ($\mathbb{Q}$-fac化とる)

$(X, B+P+M)$: klt (by def of exc)

$a :=$ log discrep $(X, B+P+M)$

$X'' \xrightarrow{\varphi} X$: extraction of $a_E(X, B+P+M) = a$
$\cup$
D''

$\varphi^*(K_X+B+P+M) = K_{X''}+B''+P''+M''+ \underset{\substack{\| \\ 1-a}}{e} D''$

X'': は$\mathbb{Q}$-fac化

$X'' \dashrightarrow X'''$: $-(K_{X''}+B''+eD''+M'') \underset{\mathbb{R}}{\sim} P'' \geq 0$-MMP

$\longrightarrow -(K_{X'''}+B'''+eD'''+M''')$: nef

P'' は str. transform of P なので この MMP で D'' はつぶれない.

$X''' \dashrightarrow \overline{X}$ MMP for $-(K_{X'''}+B'''+eD'''+M''')$
by adding D'''

$e \leq \overline{e}$

$\rightsquigarrow$ $\overline{e} =$ lct
or
$\overline{X}$: MFS

$$\begin{array}{c} W \\ \swarrow \ \downarrow \ \searrow \ \searrow \\ X \quad X'' \quad X'' \quad \overline{X} \end{array}$$: flops. ととって

$(K_{\overline{X}} + \overline{B} + \overline{e}\overline{D} + \overline{M})|_W$

$\geq (K_{X''} + B'' + \overline{e}D'' + M'')|_W$

$\geq (K_{X'''} + B''' + eD''' + M''')|_W$

$\geq (K_{X''} + B'' + eD'' + M'')|_W$

-MMP

Anti

$= (\underbrace{K_{X'} + B + M}_{\text{excep}})|_W$

$\rightsquigarrow$ $(\overline{X}, \overline{B} + \overline{e}\overline{D} + \overline{M})$ は まだ excep pair

$\rightsquigarrow$ $\overline{e} = e(t)$ は おこらない。

よって $\overline{X}$ は MFS

$\overline{X} \to T$: MFS とする。

$K_{\overline{X}} + \overline{B} + \overline{e}\overline{D} + \overline{M} \equiv_T 0$

$\Phi \qquad p\mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow$ $\overline{e} \in {}^{\exists}$ACC set depends on d, Φ, p

ACC for p.e. threshold

$\rightsquigarrow$ $\overline{e} \leq 1 - {}^{\exists}\varepsilon$

$\varepsilon(d, \Phi, p)$

$\rightsquigarrow$ $1 - a \leq 1 - \varepsilon$ D

No.

Date 10 - ④

exceptional weak Fano の有界性

Step B-1 : proof

By special BAB$_d$, ETS $\exists n$-complement (X, B) of X

さらに X は exceptional だから、定義は

effective Non vanishing of $-K_X$ を言えばよい

Prop G (Effective birationality near canonical)

$d \in \mathbb{N}$, $\exists \varepsilon \in (0,1)$ $\exists m = m(d) \in \mathbb{N}$

$\varepsilon(d)$

s.t. X : ε-lc Fano of dim d

$|-mK_X|$ define birational map

いったん Prop G をみとめると、

$a := \mathrm{discrep}(X) < \varepsilon (< 1)$ の場合に帰着される

$X' \to X$: extraction of a computing div of discrep $= a$.

$\cup$

D'

$$K_X|_{X'} = K_{X'} + \underset{1-a}{\underset{\shortparallel}{e}} D'$$

X' に対する MMP for $K_{X'} + eD'$ by adding D' を行う

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, dashed] & & X'' \\ & W \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\bar{e} \geq 0$: $(K_{X''} + \bar{e} D'')|_W \geq (K_{X'} + \bar{e} D')|_W$

$\geq \underset{\text{exceptional}}{\underline{(K_X)}}|_W$

$\leadsto$ $(X'', \bar{e} D'')$: exceptional.

$\leadsto$ RLt

$\rightsquigarrow X'' \longrightarrow \exists T$: MFS

s.t. $K_{X''} + \bar{e} D'' \equiv_T 0$

← $\bar{e}$ は高2 有限と一り T は Lowen dim の PAB 7J (たから.

$\dim T > 0 \rightsquigarrow$ Step A-0 の Case 1 より ok.

$\dim T = 0 \rightsquigarrow$ Spand VABd より X'' は Bdd $\rightsquigarrow (X'', D'')$: 有 Bdd.

$(X'', \bar{e} D'')$ は $\exists \varepsilon'$-lc by Lem A-(1)　よって　$\longrightarrow (X'', \bar{e} D'')$ は n-complement (Nonvanish で示す)

$\longrightarrow X'$ に ことずす. Done

Prop G の証明 は Step 3 での証明に似ている.

(Step 3 であつかうことに注意)

Step D-2, 3.

Claim H $\exists R' = R'(d, p, R) \subseteq [0,1) \cap \mathbb{Q}$ finite

s.t. $B \in R'$

∵ $(X, B+M)$: ε-lc

Lem A-1 $\rightsquigarrow \exists \varepsilon' > 0$ s.t. $B \in \Phi(R) \cap [0, 1-\varepsilon]$: 有限.
$\varepsilon' = \varepsilon(d, R)$ ∎

$\underset{-K_X\text{-MMP}}{X} \dashrightarrow \underset{\varepsilon\text{-lc}}{X''}$

$\longrightarrow \exists m = m(d, p, R) \in \mathbb{N}$

X'' は n-cmp とする.　$|-mK_{X''}|$ gives a birat. map.

$\longrightarrow |-mK_X|$ gives a birat. map

No.
Date 10.-6

$W \xrightarrow{\phi} X$ $\quad -\phi^* m K_X = \underset{\text{free}}{A_W} + \underset{\text{fixed}}{R_W}$

$\qquad\qquad\qquad$ ↓push $\qquad$ ↓push by ϕ

$\qquad\qquad\qquad A \qquad R.$

$\mathbb{Q}$, n/m とにたり.

$$C := \frac{1}{m} A + \frac{1}{m} R.$$

$$\Delta := \frac{1}{2} B + \frac{1}{2m} R$$

$$N := \frac{1}{2} M + \frac{1}{2m} A \ : b_{j}$$

$\rightsquigarrow (X, \Delta + N) : lc.$ ← $\cdot\, (X, B+M) : lc$, $\cdot\, (X, \frac{1}{m}R + \frac{1}{m}A) : lc$

⇝ Δ のパーナーは サーモ'n ??ーり

$\cdot\, -(K_X + \Delta + N) \sim_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}(-(K_X + B + M))$: nef

Case 1 $(X, \Delta + N)$: Not exceptional

sup A ⇝ $\exists \Delta^+ \geq 0$ s.t.
$\qquad\quad \Delta^+ \geq \Delta$ $\qquad \exists l$-complement of $(X, \Delta + N)$, $l = l(d, p, \mathcal{R})$

$$\rightsquigarrow B^+ := B + 2(\Delta^+ - \Delta)$$

$$\rightsquigarrow K_X + B^+ + M \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

$B^+ \geq B$, $\mathbb{Q}$ ... by $(X, B+M)$: exceptional.

Fin $\quad \bar{B} := \frac{1}{2}(B^+ + \Delta^+)$

$\bar{M} := \frac{1}{2}(M + N)$: b$_j$

Date 10 − ⑦

とおければ Sep D−2 の場合に帰着される.

<u>Case 2</u> $(X, \Delta + N)$: exceptional.

<u>Lem F-2</u> $\longrightarrow \exists \beta \in (0,1)$ s.t. $(X, \Delta + \beta N)$: exceptional

まだ示してない

$$\Downarrow$$

$\exists r = r(d, \beta, R) > 0$ s.t.

$$|K_X - \underbrace{r(K_X + \Delta + \beta N)}| \text{ det birat map}$$

$$\text{S}$$

$$\underbrace{r(1-\beta)N}_{\text{Cartier sing (b-nef) とみなせ}} - \underbrace{r(K_X + \Delta + N)}_{\text{nef}}$$

$\longrightarrow$ Fujita type theorem

$\longrightarrow |-rm(K_X + \Delta + \beta N)|$ det birat. map.

$$\text{S}$$

$$mK_X + m\underset{0}{\overset{}{\underset{\vee}{(}}} - rm(K_X + \Delta + \beta N)$$

$\longrightarrow \exists \underset{0}{\underset{\vee\!\!|}{D}} \in \frac{1}{rm}\mathbb{Z}$ s.t. $K_X + \Delta' + D' + \beta N' \underset{\mathbb{Q}}{\sim} 0$: klt

$\overline{M} := \beta N$

$\overline{B} := \Delta + D'$ としたら Fin.

No.
Date 10-⑥.

Lemma A-2 の証明 by taking $\mathbb{Q}$-fac, we may assume X is $\mathbb{Q}$-fac.

背理法で示す

$\exists \{(X_i, B_i+M_i)\}$. s.t. ・$(X_i, B_i+M_i)$ excep

・$D \in \Phi$ ..., M: Cartier

・X_i: FT

・$-(K_X+B+M)$: nef

・$(X_i, B_i+a_iM_i)$: NOT exc. with $a_i \nearrow 1$

i.e. $\exists P_i \sim_{\mathbb{R}} -(K_{X_i}+B_i+a_iM_i)$, $P_i \geq 0$

s.t. $(X_i, B_i+a_iM_i+P_i)$ is NOT klt.

MMPを以下で走らせる

まず① $X_i \dashrightarrow X_i''$: P_i-MMP

$$\underbrace{-(K_{X_i}+B_i+M)}_{nt} + \underbrace{\phi_* M'}_{nef} \rightsquigarrow X_i \dashrightarrow X_i'$$

is isom codim 1

$\rightsquigarrow$ ・P_i'': nef

・$(X_i'', B_i''+M_i'')$: exceptional ← $X_i \dashrightarrow X_i''$ が isom codim 2 だから

・$(X_i'', B_i''+a_iM_i''+P_i'')$ NOT klt

② $X_i'' \leftarrow X_i'''$: DLT b-up of $(X_i'', B_i''+a_iM_i''+t_iP_i'')$

let

$\Omega_i'' := B_i''+t_iP_i''$

$\Omega_i''' := B_i''' + t_iP_i''' + \cdots$

No.
Date 10-10

$\rightsquigarrow -(K_{X_i'''} + \Omega_i'' + \alpha_i M_i'')$: $\cdot$. nef

③ $P_i''' := B_i'' + \sum_{\text{exce}} E_i \in \Phi(R)$ にそれ

$X_i''' \dashrightarrow X_i''''$ $-(K_{X_i'''} + P_i'' + \alpha_i M_i'')$ ÷ MMP

④ $X_i''' \dashrightarrow \overline{X_i}$: MMP for $-(K_{X_i'''} + P_i'' + \alpha_i M_i'')$
α_i $\overline{\alpha_i}$ by addg M_i''

<u>Case</u> 1 $\overline{\alpha_i} < 1$

$\alpha_i \leq \overline{\alpha_i}$ より $\alpha_i \nearrow 1 \Rightarrow \overline{\alpha_i} \nearrow 1$ (非減少という意味)

$\overline{\alpha_i}$ が lct $\Rightarrow$ ACC for lct に矛盾

$\overline{X_i}$ が MFS $\Rightarrow$ $\overline{\alpha_i} \nearrow 1$ は global ACC に矛盾

<u>Case</u> 2 $\overline{\alpha_i} = 1$

$\rightarrow -(K_{\overline{X_i}} + \overline{P_i} + \overline{M_i})$ is nef

$\Rightarrow \exists \hat{\alpha}_i > 0$ ② $-(K_{\overline{X_i}} + \overline{P_i} + \overline{M_i})$

No.

Date 10-11

$$\left(K_{\bar{X}_i}+\bar{T}_i+\bar{Q}_i+\bar{M}_i\right)_{X_i'''} = K_{X_i''}+Q_i''+T_i''+M_i'' \sim 0$$

Claim I $Q_i'' \geq 0$

$\overset{\sim}{\underset{\text{push } X_i''}{\longrightarrow}}$ $(X_i'', B_i''+M_i'')$: exceptional に矛盾

よって Claim 2 を示せばよい

<u>proof of Claim 2</u>

$$w \to X_i,\quad w \to X_i',\quad w \to X_i'',\quad w \to X_i''',\quad w \to \bar{X}_i$$

common log res をとる

$$\left(K_{\bar{X}_i}+\bar{T}_i+\bar{M}_i\right)|_w \underset{\text{nnp}\,④}{\geq} \left(K_{X_i'''}+T_i'''+M_i'''\right)|_w$$

$$= \left(K_{X_i'''}+T_i'''+\alpha_i M_i'''\right)|_w + (1-\alpha_i)M_i'''|_w$$

$$\underset{③}{\geq} \left(K_{X_i''}+T_i''+\alpha_i M_i''\right)|_w + (1-\alpha_i)M_i''|_w$$

X_i'' に push

$$(w \to X_i'')_*\left(K_{\bar{X}_i}+\bar{T}_i+\bar{M}_i|_w\right) \geq K_{X_i''}+T_i''+M_i''$$

$$(w \to X_i'')_*(M_i''|_w) \geq M_i''$$

the negativity

$\square$