No. 10 − ①

Date

Toric case

Surface

BAB予想 = ~~Bir~~ Borisov − Alexeev − Borisov Conjecture

↖ Birkar proved & get the Field medal 2018.

**Thm** BAB $\varepsilon > 0$, $d \in \mathbb{N}$

$$\left\{ X \;\middle|\; \begin{array}{l} (X, \Delta) : \varepsilon\text{-lc } d\text{-dim} \\ -(K_X + \Delta) : \text{ample} \end{array} \right\}$$

is bounded.

$\varepsilon$-lc Fano pair

注) $d = 1$ なら $\rightsquigarrow X \simeq \mathbb{P}^1$ となる

**Def** . $(X, \Delta)$: log pair

$(X, \Delta)$: $\varepsilon$-lc $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \varphi : Y \to X$ : log res

s.t. $\varphi^*(K_X + \Delta) = K_Y + \underset{\varphi^{-1}_*\Delta}{\overset{\Gamma}{\vee\!|}}$

$\Gamma \leq 1 - \varepsilon$.

$\mathcal{P}$: the set of varieties

$\mathcal{P}$ is bounded $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\exists\, \begin{array}{c} \mathcal{X} \\ \pi \downarrow \\ T \end{array}$ : algebraic family s.t. $T$ is of finite type

s.t. $\forall X \in \mathcal{P}$

$\exists t \in T$ closed

s.t. $\pi^{-1}(t) \simeq X$.

どうして BABが大事?

<u>A.</u> モジュライの構成 $\longrightarrow$ 特異点付きの Fano 多様体の Moduli の存在にはじめて意味する。

代数多様体のパラメーター空間。

証明のキーとなること。

1. Boundedness of Complements. (Shokurov conjecture)
2. ACC for log canonical threshold for (generalized) log pair (Hacon-McKernan-Xu)
3. Effective Boundedness of birationality of $|-mK|$ (partial BAB)
4. Bddness value of $-K_X$
5. Lower bounded away from 0 for $\alpha$-invariant (Ambro Conjecture)

6. Toric case. ⑤ (Ambro, global log canonical thresholds. or Borisov-Borisov) $\alpha$-invariant = global log canonical thresholds

この講演ではここに注目 最初

1〜6の説明

<u>Def</u> $R \subseteq [0,1]$ の finite set.

$$\Phi(R) := \left\{ \frac{m-r}{m} \;\middle|\; \begin{matrix} r \in R \\ m \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}$$ : R の Hyper standard 係数集合と呼ぶ

$$I(R) = \min\{ k \in \mathbb{N} \mid R \subseteq \tfrac{1}{k}\mathbb{N} \}$$

<u>Ex</u> $\Phi(R)$ は DCC 集合

5ページ後へ

No. 10-③

Date

①

**Thm** (Bdd Cmp)$_d$

$d \in \mathbb{N}$, $R \subseteq [0,1] \cap \mathbb{Q}$ finite

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ s.t. · $I(R) \mid n$

$n = n(d,R)$ · satisfies the following:

- $(X,B)$: lc pair & $X \xrightarrow{f} Z$ contraction ($\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$)
- $B \in \Phi(R)$ (coefficient が $\Phi(R)$ に入る)
- $X$ is of Fano type $/Z$ ($\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \Delta \geq 0$ $(X,\Delta)$: klt & $-(K_X+\Delta)$ ample $/Z$)
- $-(K_X+B)$ nef $/Z$

$\Rightarrow \forall z \in Z$ closed pt. $\exists$ $n$-complement of $K_X+B$ over $z$ ($K_X+B^+$)

s.t. $B^+ \geq B$ for $m \in n\mathbb{Z}$ & $B^+$ does not depends on $m$.

i.e. $\exists U \ni z$ ($U \subset Z$ Zariski open) s.t. $n(K_X+B^+) \sim_{Z,U} 0$, $nB^+ \in \mathbb{Z}$.

**Rem!** Bdd of complements には色々のversionがあり, 上の主な代表的なものの1つ.

②

**Def** $(X,\Delta)$: lc

$D \geq 0$

$$\mathrm{lct}(D;X,\Delta) := \sup\{t \mid (X,\Delta+tD)\ \text{lc}\}$$

← log canonical threshold と呼ばれる.

彼らによってBABとは別に独立に
証明された

↓

(ACC$_d$)

<u>Thm</u> (Hacon–McKernan–Xu, 2013?) $d \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ : DCC sets, $J$ も

$$\left\{ \mathrm{lct}(D; X, \Delta) \;\middle|\; \begin{array}{l} (X, \Delta) : \mathrm{lc},\ d\text{-dim} \\ \Delta \in I,\ D \in J \end{array} \right\}$$ は ACC 集合

これ ACC は後に generalized lc pair $(X, \Delta + M)$ に拡張される (Birkar – Zhang)

$M$: birational nef divisor

③ <u>Thm</u> (Eff. birationality) $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ (= EffBir$_{\cdot d}$)

$\exists N = N(d, \varepsilon)$ s.t. $X$ : $d$-dim $\varepsilon$-lc Fano var

(= Bdvol) $\Longrightarrow |-NK_X|$ gives birational map.

( Thm' effective nonvanishing は $\varepsilon$-lc 条件は klt で十分 )

④ <u>Thm</u> (Bd of vol$(-K_X)$) $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $\exists n = n(d, \varepsilon) > 0$ s.t. $X$: $d$-dim $\varepsilon$-lc Fano, $\mathrm{vol}(-K_X) < n$.

⑤ <u>Thm</u> (LB-$\alpha_d$) $d \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $\varepsilon > 0$

$\exists \alpha := \alpha(d, r, \varepsilon) > 0$ s.t.
- $(X, \Delta)$ : $\varepsilon$-lc pair
- $A$ : v. am div s.t. $A^d \leq r$.
- $A - \Delta$ : ample.

$$\Longrightarrow \mathrm{lct}(|A|, X, \Delta) > \alpha.$$

<u>Def</u> $\mathrm{lct}(|A|, X, \Delta) := \inf\{\mathrm{lct}(D; X, \Delta) \mid D \underset{\mathbb{Q}}{\sim} A\}$

↑ we call it $\alpha$-invariant or global lct.

No. 10-⑤

2018/12/13 9メモ
Stepの順で
~~Step3 → Step1 → Step4 → Step2 → Step5~~
Step3 → Step5 → Step1 → Step3 → Step2 → Step6 → Step7 → Step8
が分かりやすい気がする

⑤

Thm (Toric) $\varepsilon>0$, $d\in\mathbb{N}$, $\exists\alpha=\alpha(\varepsilon,d)>0$ s.t.

$X$: $d$次元 Toric Fano var. s.t. $X$: $\varepsilon$-

$$\Rightarrow \mathrm{lct}(\,|-K_X|_{\mathbb{Q}}, X) > \alpha.$$

Exceptional pair の Bdd を Step1 で入れて Induction でくんだ方が素直に回ると思う。

Logical structure of the proof of DAD thm

Assume to use MMP (BCHM レベルで十分)

次元についての Induction で証明する。

Step1 (McKernan-Prokhorov, Hacon-McKernan-Xu)

$$\text{Thm } DAB_{d-1} \Rightarrow \text{Thm } ACC_d$$

さらに強く Thm EfBr$d$ $\Rightarrow$ Thm Global ACC$d$ $\Rightarrow$ Thm ACC$d$ となっている。$\boxed{+\text{Thm BdVold}}$

Step2 Thm ACC $d$ + Thm BdComp $d-1$ $\Rightarrow$ Thm BdComp $d$. ◎最重要パート
+ Thm EfBr$d$ + Thm BdVol$d$ ↳ ここで Thm BdComp$d$ を同時にcheckできる

↳ Bdd性 of exceptional pair ですから

Step3 Thm BdVold + Thm BdComp $d$ $\Rightarrow$ Thm EfBr$d$.

Note If $\Delta \geq \delta \geq 0$ (uniform bdd) $\Rightarrow$ EfBdd holds without assumption of Bd Comp ~~[illegible]~~

Step4 Thm ACC$d$ $\Rightarrow$ Thm BAB$d$ for special case

Thm$d$. $d\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$, $\delta>0$

$\{X \mid (X,B)$: $\varepsilon$-lct & $B\geq\delta$ & $B$の bdy & $K_X+B\equiv 0\}$

is bdd.

Step5 Thm ACC$d$ + Thm DAB$d-1$

$\Rightarrow$ Thm BdVol$d$ Moreover $I\subseteq[0,1]\cap\mathbb{Q}$ DCC

$\{(X,B) \mid K_X+B\equiv 0$ lct $d$-dim, $B\in I$, $B$ bdy$\}$

is log bdd.

## Step 6

$$\text{Thm ACC}_d + \text{Thm BdComp}_d + \text{Thm (Toric)}_d + \text{Thm LBd-}\alpha_{d-1} \Longrightarrow \text{Thm LBd-}\alpha_d,$$

## Step 7

$$\text{Thm ACC}_d + \text{Thm EffBir}_d + \text{Thm BAP}_d \text{ for special} + \text{Thm BdComp}_d + \text{Thm BdVol}_d + \text{Thm LBd-}\alpha_d + \text{Thm BAP}_{d-1} \Longrightarrow \text{Thm BAB}_d.$$

したがって

## § Toricの場合の α-inv の Lower bdd性

(つまり Borisov–Borisov の定理)

Thm (Toric) ⇒ Toricの場合のBABが Step 4 の F によって(より) 復元される.

cf. F. Ambro "Variation of log canonical thresholds in linear systems" IMRN (2016)