数値的小平次元0の極小モデル理論

権業善範 (東大数理)

この概要では, 対の特異点などの基本的な用語は [KM] に従って用いるとする. また全て複素数体上の仕事である. まず次の結果を得る.

Theorem 1. *対 (X, Δ) を $\mathbb{Q}$-分解的射影 dlt 対とする. さらに $\nu(K_X+\Delta) = 0$ を仮定する. このとき (X, Δ) は極小モデルを持つ.*

ここで, pseudo-effective 因子 D と豊富因子 A に対して,

$$\nu(D) = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | \limsup_{m\to\infty} m^{-k} \dim H^0(X, \llcorner mD \lrcorner + A) > 0\}$$

と定義する. 注意としては, $\nu(D)$ は豊富因子 A の依存しない数となる, また $\nu(D)$ は [N] の中では, $\kappa_\sigma(D)$ という記号が使われている. Theorem 1 は klt 対の場合, Druel により知られていた (cf. [D]). しかしこの議論は [BCHM] の議論をより精密に用いることにより, dlt 対に拡張することができる. さらに, [G, Theorem 1.2] と合わせると次の川又氏によって証明された lc 対に対する数値的小平次元が 0 のアバンダンス定理 ([Ka]) の別証明を得る.

Theorem 2. *対 (X, Δ) を射影 lc 対とする. さらに $\nu(K_X + \Delta) = 0$ を仮定する. このとき $\kappa(K_X + \Delta) = 0$ である.*

Theorem 2 は klt の場合, 中山氏によって証明された ([N, V, 4.9 Corollary]). その後この証明とは全く異なる証明を川又氏がつけ, その結果, lc に拡張した. 今回の証明は中山氏が用いた証明の方向での lc 対への拡張である.

今から, Theorem 1 の証明の概略を述べる. まず十分豊富な因子 H で (X, Δ) についてのスケール付き MMP を動かすためのスケールになるものを取ってくる. それを用いてスケール付きの MMP$(X, \Delta) \dashrightarrow (X_i, \Delta_i)$ を走らせる. このとき, 定義により, λ_i という非負な広義単調減少な数列が $K_{X_i} + \Delta_i + \lambda_i H_i$ がネフとなるように現れる. 今, λ_i の極限を λ とする.

極限 λ が 0 でない場合, 列 $(X,\Delta) \dashrightarrow (X_i,\Delta_i)$ は $(K_X+\Delta+\frac{1}{2}\lambda)$-MMP となり, [BCHM] により停止する. したがって, $\lambda=0$ としてよい. 今, 列 $(X,\Delta) \dashrightarrow (X_i,\Delta_i)$ が停止しないとする. このとき X を十分先の X_i に取り替えることで, 列 $(X,\Delta) \dashrightarrow (X_i,\Delta_i)$ をフリップの無限列としてよい. さらに, $K_{X_i}+\Delta_i+\lambda_i H_i$ がネフなので, $\lambda=0$ に注意すると $K_X+\Delta$ は数値的に固定因子を持たない因子の極限と同値になる. これは $K_X+\Delta$ の因子的 Zariski 分解の負部分が 0 であることを導く. また, 今 $\nu(K_X+\Delta)=0$ なので, $K_X+\Delta$ の因子的 Zariski 分解の正部分も 0 である (cf. [N, V, 2.7 Proposition (8)]). この結果, $K_X+\Delta\equiv 0$ となり, 列が停止しないことに矛盾する.

参考文献

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon and J. M^{c}Kernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), 405-468.

[D] S. Druel, Quelques remarques sur la décomposition de Zariski divisorielle sur les variétés dont la premiére classe de Chern est nulle, to appear in Math. Z.

[G] Y. Gongyo, Abundance theorem for numerically trivial log canonical divisors of semi-log canonical pairs, preprint, arXiv:1005.2796v2.

[Ka] Y. Kawamata, On the abundance theorem in the case of $\nu=0$, preprint, arXiv:1002.2682.

[KM] J. Kollár and S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math.,134 (1998).

[N] N. Nakayama, *Zariski decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, 14. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.