

対数的標準特異点を持つ弱 Fano 多様体について

権業善範 (東京大学大学院数理科学研究科)

この概要では、対の特異点などの基本的な用語は [KoM] に従って用いるとする。

Definition 1. 正規複素射影多様体 X と、その上の \mathbb{Q} 係数有効 Weil 因子 Δ について、 \mathbb{Q} 係数 Weil 因子 $K_X + \Delta$ が \mathbb{Q} -Cartier 因子の時、 (X, Δ) を対数的対と呼ぶ。対数的対 (X, Δ) が弱対数的 Fano 対とは、 $-(K_X + \Delta)$ が nef かつ big である時を言う。さらに $\Delta = 0$ の時、単に X が弱 Fano 多様体であるという。

弱対数的 Fano 対 (X, Δ) について次のような重要な問題がある (cf. [S, 2.6. Remark-Corollary], [P, 11.1]):

- (i) $-(K_X + \Delta)$ は semiample か。
- (ii) \mathbb{Q} -complements は存在するか、すなわち、 $K_X + \Delta + D \sim_{\mathbb{Q}} 0$ かつ $(X, \Delta + D)$ が対数的標準対となる \mathbb{Q} 係数有効因子 D は存在するか。
- (iii) Kleiman-森錐 $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐か。

(i) が肯定的に解決されれば (ii) が肯定的に従う。対数的対 (X, Δ) が川又対数的端末対の場合、これら三つの問題は川又-Shokurov 固定点自由化定理と錐定理により肯定的に従う (cf. [KoM])。また Shokurov は曲面に対してこれら三つの問題を肯定的に解決した (cf. [S, 2.5. Proposition])。

本研究はこの三つの問題の高次元対数的標準対に対する研究である。それによりまず次の定理を得た。

Theorem 2. 高々対数的標準特異点をもつ 3 次元弱 Fano 多様体 X に対して、 $-K_X$ が semiample であり、 $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐である。

Theorem 3. 高々対数的標準特異点をもつ 4 次元弱 Fano 多様体 X に対して、任意の lc center が高々 1 次元であるとする。このとき $-K_X$ は semiample であり、 $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐である。

しかし、 $d(\geq 3)$ 次元弱対数的 Fano 対の場合、これら三つの問題に対して、一般には否定的な結論を得た。実際、ここでは plt 弱対数的 Fano 対で反対数的標準因子が semiample にならない例を構成する (特に、三次元のそのような例は [Kar1] と [Kar2])

の主結果が成り立たないことを示している). 2次元以上の非特異射影多様体 S で $-K_S$ が nef かつ semiample でない対が存在することはよく知られている. 射影多様体 X_0 を射影的正規埋め込み $S \subset \mathbb{P}^N$ の錐とし, 非特異多様体 X を X_0 の頂点での blow up とする. 例外因子を E と書く. このとき (X, E) は plt 弱対数的 Fano 対で $-(K_X + E)$ が semiample でないものとなる. また, 特に S を楕円曲線上の次数 0 の分裂のしない階数 2 のベクトル束に付随する \mathbb{P}^1 -束とする, このとき (X, Δ) は \mathbb{Q} -complements を持たないことがわかる. S を \mathbb{P}^2 の非常に一般の 9 点での blow up とすると, このとき, X の Kleiman-森錐は多面錐でなくなる.

さらに, 高次元の場合を考える. Ambro と藤野による全ての対数対に対する錐定理 ([A, Theorem 5.10], [F, Theorem 16.5]) を用いることで, 任意の lc center が高々 1 次元となる d 次元対数的標準弱対数的 Fano 対 (X, Δ) に対して $\overline{NE}(X)$ は有理多面錐である. また, 射影的 sDlt 対に対する $(d-1)$ 次元のアバundance 予想が肯定的に解決されれば, $-(K_X + \Delta)$ は semiample であることを証明した. 実際, Theorem 2 と Theorem 3 はこれらの系である.

以上の研究は Ambro と藤野による対数的標準特異点に対する極小モデル理論が基盤となっている ([A], [F]).

参考文献

- [A] F. Ambro, *Quasi-log varieties*, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebr, 220–239; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 214–233.
- [F] O. Fujino, *Fundamental theorems for the log minimal model program*, arXiv:0909.4445.
- [Kar1] I. V. Karzhemanov, *Semiample theorem for weak log Fano varieties*, Russ. Acad. Sci. Sb. Math. 2006. V. 197 (10). 57–64.
- [Kar2] I. V. Karzhemanov, *Base point free theorem for weak log Fano threefolds*, arXiv:0906.0553
- [KoM] J. Kollár and S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math., **134**(1998)
- [P] Y. G. Prokhorov, *Lectures on Complements on Log Surfaces*, MSJ Memoirs, **10**(2001)
- [S] V. V. Shokurov, *Complements on surfaces*. J. Math. Sci. (New York). 2000. V. 102(2). P. 3876–3932.