半対数的標準対の数値的自明な対数的標準因子に対するアバンダンス定理

権業善範[*]

東京大学大学院数理科学研究科

この概要では, 対の特異点などの基本的な用語は [KaMM] に従って用いるとする．また全て複素数体上の仕事である．まず, 次の予想がアバンダンス予想と呼ばれる．

予想 0.1 (アバンダンス予想)**.** 対 (X, Δ) を射影的対数的標準対とする．このとき $\nu(K_X + \Delta) = \kappa(K_X + \Delta)$ が成り立つ．さらに, もし $K_X + \Delta$ が *nef* の時, それは *semi-ample* である．

数値的対数的小平次元 $\nu(K_X + \Delta)$ や対数的小平次元 $\kappa(K_X + \Delta)$ については, [N] を参照してほしい．この概要では, これらの定義は使わない．上の予想は極小モデル理論においてとても重要な予想である．実際, 予想 0.1 から極小モデル予想が従う (cf. [B]).
今回扱うのは, 予想 0.1 の (X, Δ) が極小モデルかつ $\nu(K_X + \Delta) = 0$ の場合 (i.e. $K_X + \Delta \equiv 0$ の場合) である．まず次を得ることができる．

定理 0.2. 対 (X, Δ) を射影的対数的標準対とする．さらに $K_X + \Delta \equiv 0$ を仮定する．このとき $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} 0$ が成り立つ．

この結果は川又対数的端末対の場合は [A], [N] により知られていた．今回, 川又対数的端末対の場合の結果と [BCHM] を組み合わることによる対数的標準対まで広げることができた．また, この仕事を終えてから知ったことだが, 定理 0.2 は [CKP] のように Simpson の結果 [Sim] を用いることでも証明できる (cf. [Ka])．しかしながら我々の証明には Simpson の結果は必要ではない．次に半対数的標準対に対する定理 0.2 を考え, それを解決する．ここで**半対数的標準対**は次のような定義である．純 d 次元被約 S_2-スキーム X と, その上の $\mathbb{Q}$-係数有効 Weil 因子 Δ について, $\mathbb{Q}$-係数 Weil 因子 $K_X + \Delta$ が $\mathbb{Q}$-Cartier 因子であるとする．さらに X が余次元 1 で正規交叉を仮定する．既約分解を $X = \bigcup X_i$ とする．正規化を $\nu : X' := \coprod X'_i \to X = \bigcup X_i$ とする．ここでいう正規化とは各既約成分を正規化をして非交和をとったものをさす．スキーム X 上の $\mathbb{Q}$-因子 Θ を $K_{X'} + \Theta := \nu^*(K_X + \Delta)$ を満たす因子として定義する, そして $\Theta_i := \Theta|_{X'_i}$ をおく．この対 (X, Δ) が**半対数標準対** (略して, **slc 対**) とは, (X'_i, Θ_i) は lc を満たすときをいう．

定理 0.3. 対 (X, Δ) を射影的半対数的標準対とする．さらに $K_X + \Delta \equiv 0$ を仮定する．このとき $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} 0$ が成り立つ．

この証明は基本的には [Fj] の枠組みを [BCHM] を用いながら遂行していく．そのとき必要な鍵となる定理は次のものである．

定理 0.4. 対 (X, Δ) を射影的川又対数的端末対とする．さらに $K_X + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} 0$ を仮定する．このとき十分大きく割り切れる自然数 m に対して $\rho_m(\mathrm{Bir}(X, \Delta))$ は有限群である．

---

[*] gongyo@ms.u-tokyo.ac.jp

ここで $\rho_m(\mathrm{Bir}(X,\Delta))$ とは B-pluricanonical 表現の像であり, 定義は次で定められる．まず $\varphi : X \dashrightarrow X$ が B-双有理写像とは共通の対数的特異点解消 $\alpha, \beta : W \to X$ が $\varphi \circ \alpha = \beta$ と $\alpha^*(K_X + \Delta) = \beta^*(K_X + \Delta)$ を満たすように存在する固有的双有理写像のことである．さらに,

$$\rho_m : \mathrm{Bir}(X,\Delta) := \{\varphi : X \dashrightarrow X | \varphi \text{ は } B\text{-双有理写像 } \} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(H^0(X, m(K_X + \Delta)))$$

は引き戻しで定義される自然な群準同型写像である．この定理の主張は中村氏–上野氏, Deligne 氏らによるコンパクト Moishezon 多様体上 pluricanonical 表現の有限性 (cf. [NU]) の対数版となっており, (X,Δ) が対数的標準対でかつ $K_X + \Delta$ が nef の条件の下, 藤野氏により予想されている (cf. [Fj])．この証明は酒井氏の [S] と同様な手法の開多様体のコンパクト化と有理型関数係数の多重 n-形式の可積分条件を考察することで得られる．

応用として, [G] の主結果の一つが一般次元に拡張出来る．

系 0.5. 対数的対 (X,Δ) を対数的標準弱対数的 *Fano* 対とする．このとき, (X,Δ) の任意の *lc center* が高々 1 次元ならば $-(K_X + \Delta)$ は *semi-ample* である．

また [G] と同様な手法で次も得られる．

系 0.6. 対数的対 (X,Δ) を射影的対数的標準対とする．さらに $K_X + \Delta$ が *nef* かつ *big* であると仮定する．このとき, (X,Δ) の任意の *lc center* が高々 1 次元ならば $(K_X + \Delta)$ は *semi-ample* である．

参考文献

[A] F. Ambro, The moduli b-divisor of an lc-trivial fibration, Compositio. Math. 141 (2005), no. 2, 385–403.

[B] C. Birkar, On existence of minimal models II, preprint, arXiv:0907.4170, to appear in J. Reine Angew Math.

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon and J. M^{c}Kernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), 405-468.

[CKP] F.Campana, V. Koziarz and M. Păun, Numerical character of the effectivity of adjoint line bundles, preprint, arXiv:1004.0584.

[Fj] O. Fujino, Abundance theorem for semi log canonical threefolds, Duke Math. J. 102 (2000), no. 3, 513–532.

[G] Y. Gongyo, On weak Fano varieties with log canonical singularities, preprint, arXiv:0911.0974.

[Ka] Y. Kawamata, On the abundance theorem in the case of $\nu = 0$, preprint, arXiv:1002.2682

[KaMM] Y. Kawamata, K, Matsuda and K, Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, 283–360, Adv. Stud. Pure Math., 10, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[NU] I. Nakamura and K. Ueno, An addition formula for Kodaira dimensions of analytic fibre bundles whose fibre are Moišezon manifolds, J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 363–371.

[N] N. Nakayama, *Zarisiki decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, 14. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[S] F. Sakai, *Kodaira dimensions of complements of divisors, Complex analysis and algebraic geometry*, pp. 239–257. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.

[Sim] C. Simpson, Subspaces of moduli spaces of rank one local systems, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 26 (1993), no. 3, 361–401.