$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面上の種数 2 次数 5 の曲線族について

楫研究室 権業善範

概要

$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面上の直線を一つ固定しその直線を通る 3 次曲面を動かすというアイデアで種数 2 次数 5 の曲線族を具体的に求めた. また非特異 2 次曲面上の $(3,2)$ 型の因子は $(2,3)$ 型の因子にその曲面上で変形できないことを示した.

1 動機

一般に非特異射影曲線は $\mathbb{P}^3$ 内に埋め込むことができることが知られている. しかしその方程式を求めることは一般的には難しい. 種数 0 や 1 の曲線は射影平面の中で具体的な方程式がよく知られている. そこで種数 2 の曲線の方程式系を求める. さらにただ求めるだけではなく曲線族として具体的に構成する方法を思いついた. また種数 2 の曲線は非特異 2 次曲面上で $(3,2)$ 型もしくは $(2,3)$ 型の因子で得られるがその二つが現れる曲線族は存在するのかということも考えた.

2 問題

Question 1. $\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面は $Q := V(q := xw - yz)$ に $\mathbb{P}^3$ の射影変換でうつりあうが,Q 上の種数 2 次数 5 の曲線の具体的な定義イデアルの生成元はなにか.

Question 2. 種数 2 の曲線が同型類を除いて全て現れる Q 上の曲線族は存在するのか.

Question 3. $(3,2)$ 型の因子 C は $(2,3)$ 型の因子 D に Q 上で変形できるか. すなわち次のような連結代数的スキーム S と $\mathscr{X} \subseteq Q \times S$ で第 2 射影 $\pi : \mathscr{X} \longrightarrow S$ が

(1) π が全射な平坦射,
(2) $\exists k$ 有理点 $x, y \in S$ $s.t.$ $\pi^{-1}(x) = C$ かつ $\pi^{-1}(y) = D$

となるものは存在するのか??

3 結果

$\ell = V(x, y)$ として, ℓ が含まれている 3 次曲面を $S = V(p := fx + gy)$ とする.

Theorem A (Answer to Question 1)**.** $r = zf + wg, J = \langle p, q, r\rangle$ とする. もし $Q.S(\ell) = 1$ ならば $I = \langle x, y\rangle \cap J$ が成り立つ.

Proposition 1. $C \subset Q$ が $(3, 2)$ 型の因子と Q の第 1 射影 $\pi_1 : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ に対して π_1 が有限射かつ相異なる 6 点以上で分岐していることと C は非特異既約曲線であることが必要十分である. ただし C の特異点の像は分岐点とみなす.

Theorem B (Answer to Question 2)**.** $f = Ax^2 + By^2 + Cw^2, g = Dz^2 + Bw^2 + 2Ewx,\ T = \{B^2 - E^2 + BC + AB + AC + AD + BD = 0\} \subset \mathbb{P}^4_k$ とする.

$$\pi : \mathscr{X} \overset{surj}{\longrightarrow} T\ s.t.\ \forall P = (A : B : C : D : E) \in T, \pi^{-1}(P) = \mathrm{Proj}(k[x, y, z, w]/(J(P))$$

(ただし $J(P)$ は P を f, g の係数にもつ J とする.) となる曲線族に対して, この曲線族は T のある Zariski 開集合 U に対して U から種数 2 のモジュライ空間への自然な全射な *generically* 有限射が存在するという性質を持つ.

Proposition 2. Q 上の種数 2 次数 5 の曲線のヒルベルトスキームを $\mathscr{H}^Q_{5t+3}$ とする. 任意の k 有理点 $[C] \in \mathscr{H}^Q_{5t+3}$ に対して C は因子でその型は $(3, 2)$ か $(2, 3)$ になる.

Theorem C (Answer to Question 3)**.** $\mathscr{H}^Q_{5t+3}$ の連結成分は 2 つありそれぞれ有理的である. また一つの連結成分上では任意の閉点の曲線の因子の型は同じであり, その次元は両方とも 12 次元である.

4 課題

今後の課題としては Theorem B の一般化をしたいので次のような問題を考えたい.

Question 4. 種数 2 の曲線のモジュライ空間への自然な双有理同値になるような非特異 2 次曲面 Q 上の種数 2 次数 5 の曲線族のパラメーター空間は構成できるか.

参考文献

[Har] R.Hartshorne. *Algebraic Geometry*.Springer Verlag,1977.

[Ser] E.Sernesi. *Deformations of Algebraic Schemes*.Grundlehren der mathmatischen Wissenschaften,334.