$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面上の種数 2 次数 5 の曲線族について

楫研究室 權業善範

1 Motivation

C : 非特異射影曲線.

$$g(C) = 0 \Longrightarrow C \cong \mathbb{P}^1.$$
$$g(C) = 1 \Longrightarrow C \cong (\text{非特異 3 次曲線}) \subset \mathbb{P}^2.$$
$$g(C) = 2 \Longrightarrow C \text{ は } \mathbb{P}^2\text{内にはない}.$$
$$\Longrightarrow \mathbb{P}^3\text{内の大域的な定義方程式系は何か?}$$

$\boxed{Q.1\ \mathbb{P}^3\text{内の種数 2 の曲線 } C \text{ の定義方程式は？}}$

2 アイデア

任意の $\mathbb{P}^3$ 内の種数 2 の曲線は 2 次曲面上に存在する.

$$\Downarrow$$

Divisor の議論を使う.

非特異 2 次曲面 $Q := V(xw - yz) \subset \mathbb{P}^3$ 上で

$$(a, b) \in \mathrm{Cl}Q = \mathbb{Z}\ell' \oplus \mathbb{Z}\ell.\ (\ell' := V(x, z),\ \ell := V(x, y)).$$

$C \subset Q : g(C) = 2$

$\Longrightarrow C$ の divisor type$= (3, 2)$or$(2, 3)$

$(3,2)$divisor の定義方程式系を見つける.

$$\Downarrow$$

$$(3,2) = (3,3) - (0,1).$$

$$\Downarrow$$

$(3,3)$ は 3 次曲面 S において $Q \cap S$, $(0,1)$ は $\ell = V(x,y)$ で得られる.

$$\Downarrow$$

$\ell \subset S$ に対して $Q \cap S$ から ℓ を除いたスキームの方程式系を求める.

$$\Downarrow$$

general な $(3,2)$divisor は smooth curve.

任意の Q 上の $(3,2)$divisor C の定義方程式系を求める.

$$\Downarrow$$

種数 2 の曲線の定義方程式系が見つかる.

$\boxed{Q.1\ \mathbb{P}^3\text{内の種数 2 の曲線 } C \text{ の定義方程式は？}}$

$$Q = V(xw - yz) \subset \mathbb{P}^3$$

f, g : 2 次同次式.

$\ell = V(x, y) \subset S := V(xf + yg)$; 3 次曲面 $\subset \mathbb{P}^3$

3 Answer to Q.1

Theorem A.

$general$ な 2 次同次式 f, g に対して

$J := \langle xw - yz, xf + yg, zf + wg \rangle$ は種数 2 次数 5 の曲線の定義イデアル.

$Q.2$ 種数 2 の曲線の同型類が全て現れる曲線族は構成できるか？

4 Answer to Q.2

$$f = Ax^2 + By^2 + Cw^2$$

$$g = Dz^2 + Bw^2 + 2Ewx$$

$T := \{B^2 - E^2 + BC + AB + AC + AD + BD = 0\} \subset \mathbb{P}^4_k$ とする.

Theorem C.

$$\exists \pi : \mathscr{X} \xrightarrow{surj} T \ s.t.$$

$$\forall t = (A : B : C : D : E) \in T,\ \pi^{-1}(t) = \mathrm{Proj}(k[x, y, z, w]/(J(t)))$$

この

$$\pi : \mathscr{X} \xrightarrow{surj} T$$

に対して

$$\exists U \subseteq T : open\ s.t.\ U \twoheadrightarrow \mathscr{M}_2 : \text{全射}.$$

$$J(t) := \langle xw - yz, xf + yg, zf + wg \rangle.$$

$$(f = Ax^2 + By^2 + Cw^2,\ g = Dz^2 + Bw^2 + 2Ewx.)$$

U の存在を保証するのが次の定理である.

Proposition 1.

$C \subset Q : (3,2)$ *divisor*, 2 重被覆 $\pi_1 : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$

π_1 が *finite* かつ相異なる 6 点以上で分岐している $\Longleftrightarrow$ C:*smooth curve*

ただし C の特異点の像は分岐点とみなす.

5　課題

$Q.4$ $\mathscr{M}_2$と双有理同値となるような族のパラメーター空間を $Q.2$ の時のような方法で構成できるか.

$$\boxed{Q.3\ C : (3,2) \text{ は } D : (2,3) \text{ に } Q \text{ 上で変形できるか？？}}$$

$i.e.\ \exists ? S, \exists ? \mathscr{X} \subseteq Q \times S, \pi : \mathscr{X} \longrightarrow S\ s.t.$

1. S :connected
2. π :flat surjective
3. $\exists x, y \in S_k\ s.t.\ \pi^{-1}(x) = C, \pi^{-1}(y) = D$

6 Answer to Q.3

Hilbert スキームが非常に有効!!

Proposition 2. $\forall [C] \in (\mathscr{H}^{Q}_{5t+3})_k$
$C : (3,2)\ \ or\ (2,3) divisor.$

Theorem C. $\mathscr{H}^{Q}_{5t+3} = W_1 \cup W_2\ \ s.t.$

1. W_1, W_2 :*connected, rational*
2. $\forall [C] \in (W_1)_k, C : (3,2) divisor$
3. $\forall [D] \in (W_2)_k, D : (2,3) divisor$