Tychonoff* の定理の二つの直接証明†

古田 幹雄

2011 年 12 月 31 日

・このノートでは Tychonoff の定理の二通りの「直接証明」を紹介する。
・「直接証明」とは、道具の導入を可能な限り避けた証明というほどの意である。
・二通りの証明の関係は、大雑把に述べるなら次のようにいえる。
・コンパクト空間の族の積空間の積位相には、二種の有限性がある。

1. 垂直方向には「各成分のコンパクト性に基づく有限性」がある。
2. 水平方向には「積位相の定義に基づく有限性」がある。

- 第一の方法は、まず水平方向の有限性を用いてその結果を基本開集合の族として記述し、最後に垂直方向の有限性を全ての成分で一斉に用いる。
- 第二の方法は、まず垂直方向の有限性を使ってその結果を各成分の集積点として記述し、それらを水平方向の有限性を用いてすべての成分へと拡張する。

・第一の証明は Alexander's subbase lemma による方法の変形である。
・第二の証明は本質的に Wright (1994) によるものである。
・短い簡潔な証明は Subsection 2.3 を参照のこと。
・文献については Section 4 を参照のこと。

1 Tychonoff の定理

$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を位相空間の族とする。

Theorem 1 (Tychonoff)**.** $\forall\, X_\alpha$ がコンパクトならば $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ は積位相に関してコンパクト.

記号と言葉を導入し、コンパクト性と積位相の定義を思い出し、上の定理をきちんと述べる。

・位相空間 X_α の開集合全体の集合を $\mathcal{O}_\alpha$ とする。
・X_α はコンパクトと仮定する。すなわち、

$$\forall \mathcal{U} \subset \mathcal{O}_\alpha \left(\bigcup_{o\in\mathcal{U}} o = X_\alpha \Longrightarrow \exists \mathcal{V} \subset \mathcal{U} \quad \left(\#\mathcal{V} < +\infty \quad \text{and} \quad \bigcup_{o\in\mathcal{V}} o = X_\alpha \right)\right)$$

*"Tychonoff" はトポロジー関係、"Tikhonov" は解析関係の文献で多い傾向がある。チホノフ、チコノフ
†2012/1/1, 1/2 に誤りを訂正.

・$\beta \in A$ および $o \in \mathcal{O}_\beta$ に対して $\underline{o} \in \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ を次で定義する。

$$\underline{o}(\alpha) = \begin{cases} o & \alpha = \beta \\ X_\alpha & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

・$\prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ の要素 u を「開集合分布」と呼ぶことにし、$\mathrm{supp}(v)$, $U(v)$ を次で定義する.

$$\mathrm{supp}(v) = \{\alpha \in A : v(\alpha) \neq X_\alpha\}, \qquad U(v) = \prod_{\alpha\in A} v(\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\mathrm{supp}(v)} U(\underline{v(\alpha)}).$$

・$u, v \in \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ に対して、成分ごとの $\cap$ によって $u \cap v$ を定義する。このとき

$$U(u\cap v) = U(u) \cap U(v), \qquad u = \bigcap_{\alpha\in\mathrm{supp}(u)} \underline{u(\alpha)}.$$

・開集合分布からなる集合 $\Sigma \subset \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ に対して $U(\Sigma)$ を次で定義する.

$$U(\Sigma) = \bigcup_{v\in\Sigma} U(v).$$

・次に注意する： $\mathrm{supp}(v\cap v') = \mathrm{supp}(v) \cup \mathrm{supp}(v')$, $\qquad U(\Sigma \cup \Sigma') = U(\Sigma) \cup U(\Sigma')$
・supp が有限である開集合分布全体を $\prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ とかく：

$$\prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha = \{u \in \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha : \#\mathrm{supp}(u) < +\infty\}$$

・積位相の開集合の基底は $u \in \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ に対する $U(u)$ の全体である。
・$U(\Sigma) = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ であるとき「Σ は被覆である」ということにする。
・一般に、位相空間の位相がある開集合の基底によって与えられるとき、任意の開被覆は基底からなる細分をもつ。
・よって Tychonoff の定理 (Theorem 1) は本質的に次の命題である。

Theorem 2 (Tychonoff)**.** $\Gamma \subset \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ に対して次が成立する：
「Γ のどの有限部分族も被覆でない」$\Longrightarrow$ 「Γ は被覆でない」

2 第一の証明

2.1 少し抽象的な述べ方

Proof of Theorem 2. まず、少し抽象的だが短い記述によって議論を述べる。
(1) $\Gamma \subset \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ のどの有限部分族も被覆でないと仮定する。
(2) $\prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ のベキ集合の部分集合 $\Omega(\Gamma)$ を次で定義する

$$\Omega(\Gamma) = \{\Sigma \subset \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha : \Sigma \supset \Gamma, \quad \Sigma\text{ のどの有限部分族も被覆でない。}\}$$

(3) 仮定から $\Gamma \in \Omega(\Gamma)$ であり、特に $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$.

(4) $\Sigma \in \Omega(\Gamma)$ とする。このとき $u \in \prod_{\alpha\in A}\mathcal{O}_\alpha$ に対して、$\Omega(\Gamma)$ の定義から次が成立する。

$$u \notin \Sigma \quad \Longleftarrow \quad \exists \Delta_u \subset \Sigma \quad \left(\#\Delta_u < +\infty \quad \text{and} \quad U(\Delta_u \cup \{u\}) = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right).$$

(5) $\Omega(\Gamma)$ を包含関係に関して順序集合とみなす。
(6) $\Omega(\Gamma)$ は帰納的である。実際、任意の空でない全順序部分集合 $\mathcal{S} \subset \prod_{\alpha\in A}\mathcal{O}_\alpha$ に対して

$$\bigcup_{\Sigma\in\mathcal{S}} \Sigma \in \Omega(\Gamma).$$

(7) Zorn の補題により $\Omega(\Gamma)$ の極大元が存在する。
(8) Γ_∞ を極大元とする。極大性から $u \in \prod_{\alpha\in A}\mathcal{O}_\alpha$ に対して、次の判定条件が成立する：

$$u \notin \Gamma_\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \Delta_u \subset \Gamma_\infty \quad \left(\#\Delta_u < +\infty \quad \text{and} \quad U(\Delta_u \cup \{u\}) = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right).$$

(9) $\Delta \subset \prod_{\alpha\in A}\mathcal{O}_\alpha$ が有限集合であるとき、次が成立することを見る。

$$(\forall u \in \Delta \quad u \notin \Gamma_\infty) \Longrightarrow \bigcap_{u\in\Delta} u \notin \Gamma_\infty.$$

(10) 実際これは上の判定条件を用いると、次の一般的包含関係からわかる。

$$\bigcap_{u\in\Delta} U(\Delta_u \cup \{u\}) = \bigcap_{u\in\Delta} (U(\Delta_u) \cup U(u)) \subset \left(\bigcup_{u\in\Delta} U(\Delta_u)\right) \cup \left(\bigcap_{u\in\Delta} U(u)\right) = U\left(\bigcup_{u\in\Delta} \Delta_u\right) \cup U\left(\bigcap_{u\in\Delta} u\right)$$

(11) 各 $u \in \prod_{\alpha\in A}\mathcal{O}_\alpha$ に対しては $\mathrm{supp}(u)$ は有限集合であるので、上の主張の対偶をとって

$$\left(u = \bigcap_{\alpha\in\mathrm{supp}(u)} \underline{u(\alpha)} \in \Gamma_\infty\right) \Longrightarrow (\exists \alpha \in \mathrm{supp}(u) \quad \underline{u(\alpha)} \in \Gamma_\infty).$$

(12) よって各 $u \in \Gamma_\infty$ に対してある $\alpha \in A$ が存在し、$\underline{u(\alpha)} \in \Gamma_\infty$ かつ $U(u) \subset U(\underline{u(\alpha)})$.
(13) 各 $\alpha \in A$ に対して、$\mathcal{U}_\alpha, \Sigma_\alpha, o_\alpha$ を次のようにおく。

$$\mathcal{U}_\alpha = \{o \in \mathcal{O}_\alpha : \underline{o} \in \Gamma_\infty\}, \quad \Sigma_\alpha = \{\underline{o} : o \in \mathcal{U}_\alpha\}, \quad o_\alpha = \bigcup_{o\in\mathcal{U}_\alpha} o \in \mathcal{O}_\alpha.$$

(14) このとき、上に示したことから

$$\Gamma_\infty \supset \bigcup_{\alpha\in A} \Sigma_\alpha, \quad U(\Gamma_\infty) = \bigcup_{\alpha\in A} U(\Sigma_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in A} U(\underline{o_\alpha}).$$

(15) まず左側の関係式から、各 α に対して $\mathcal{U}_\alpha$ の有限部分族が X_α を覆わないことがわかる。
(16) 従って各 X_α のコンパクト性から $X_\alpha \setminus o_\alpha \neq \emptyset$. よって選択公理より、

$$\prod_{\alpha\in A} (X_\alpha \setminus o_\alpha) \neq \emptyset$$

(17) また右側の関係式から補集合をとって

$$\left(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right) \setminus U(\Gamma_\infty) = \left(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right) \setminus \bigcup_{\alpha\in A} U(\underline{o_\alpha}) = \prod_{\alpha\in A} (X_\alpha \setminus o_\alpha).$$

(18) あわせると、$\left(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right) \setminus U(\Gamma) \supset \left(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right) \setminus U(\Gamma_\infty) \neq \emptyset$. よって、$\Gamma$ は被覆ではない。 $\square$

2.2 もう少し具体的に

極大元をとるプロセスは、もし $\Sigma \in \Omega(\Gamma)$ に対して (4) の逆が成立しなければ、そのような $u \notin \Sigma$ を Σ に付け加える、というものである。

付け加える要素 u は、ある α とある $o \in {}_\alpha\mathcal{O}$ によって $\underline{o}$ の形にとれる、という議論が (9)(10)(11)(12) である。このプロセスを、与えられた Γ の元すべてに対して考察すれば、Tychonoff の定理の証明のためには十分である。これを踏まえると、先の証明を、もう少し具体的に以下のように記述することができる。

説明のために、まず言葉を準備する。

・各 $\Sigma \subset \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ に対する写像 $\epsilon : \Sigma \to A$ を「部分的選択」と呼び、$\Sigma = dom(\epsilon)$ と書く。

・$\Gamma \subset \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ に対して、$dom(\epsilon) \subset \Gamma$ となる部分的選択全体の集合を $M_0(\Gamma)$ とおく.

・部分的選択の間の順序 $\epsilon \leq \epsilon'$ を定義域の制限として定める：

$$\epsilon \leq \epsilon' \iff \big((dom(\epsilon) \subset dom(\epsilon')) \wedge \forall u \in dom(\epsilon)\ \ (\epsilon(u) = \epsilon'(u))\big).$$

・開集合分布 $u \in \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ と $\alpha_0 \in A$ に対して $u^{(\alpha_0)} \in \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ を次で定める。

$$u^{(\alpha_0)}(\alpha) = \begin{cases} u(\alpha_0) & (\alpha = \alpha_0) \\ X_\alpha & (\alpha \neq \alpha_0) \end{cases}$$

・部分集合 $\Sigma \subset \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ と部分的選択 ϵ に対して $\Sigma^{(\epsilon)} \subset \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ を次で定める。

$$\Sigma^{(\epsilon)} = \{v^{(\epsilon(v))} \,:\, v \in \Sigma \cap dom(\epsilon)\} \cup (\Sigma \setminus dom(\epsilon))$$

・$\epsilon_\emptyset : \emptyset \to A$ を空集合から A への唯一の写像とする。このとき

$$v^{(\epsilon_\emptyset)} = v, \qquad \Sigma^{(\epsilon_\emptyset)} = \Sigma.$$

・一般に $U(\Sigma^{(\epsilon)}) \supset U(\Sigma)$ である。特に、$\Sigma^{(\epsilon)}$ が被覆でなければ Σ も被覆でない.

よって Tychonoff の定理を示すには次を示せば十分である。

Theorem 3. $\Gamma \subset \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$ に対して次が成立する：
「Γ のどの有限部分族も被覆でない」$\Longrightarrow$ 「ある $\epsilon \in M_0(\Gamma)$ に対して $\Gamma^{(\epsilon)}$ は被覆でない」

Proof. Theorem 3 の前提が成立したとする.

・$M_0(\Gamma)$ の部分集合 $M(\Gamma)$ を次で定める。

$$M(\Gamma) = \{\epsilon \in M_0(\Gamma) \,:\, \Gamma^{(\epsilon)} \text{ のどの有限部分族も被覆でない}\}$$

・仮定から $\epsilon_\emptyset \in M(\Gamma)$. 特に $M(\Gamma) \neq \emptyset$.

・Zorn の補題によって証明は次の 3 個の主張に帰着。

Claim 4. $M(\Gamma)$ の元 ϵ_0 が $dom(\epsilon_0) = \Gamma$ を満たすとき、$\Gamma^{(\epsilon_0)}$ は被覆でない.

これは前の subsection の (14)∼(18) と同等の議論から示される。(「垂直方向の有限性」)

Claim 5. $M(\Gamma)$ の極大元 ϵ_0 に対して $dom(\epsilon_0) = \Gamma$.

これは前の subsection の (8)∼(12) と同等の議論から示される。(「水平方向の有限性」)

Claim 6. $M(\Gamma)$ は帰納的順序集合.

これは $M(\Gamma)$ の定義が「有限的」であることから従う。前の subsection の (6) に相当する。 □

2.3 もう少し抽象的に

同じ考え方で、$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ の開集合の基底だけでなく、全ての開集合を扱う記述に一般化する。まず記号を準備する。

・X_α のすべての開集合の全体を $\mathcal{O}_\alpha$ とする。
・$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ のすべての開集合の全体を $\mathcal{O}_0$ とする。
・$p_\alpha : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\alpha$ を射影とする：$p_\alpha(x) = x(\alpha)$
・各 $U \in \mathcal{O}_0$ と各 $\alpha \in A$ に対して、$w_\alpha(U) \in \mathcal{O}_\alpha$ を、次の性質によって定義する：

「$p_\alpha^{-1}(w) \subset U$ となるような $w \in \mathcal{O}_\alpha$ であって包含関係について最大のもの」[*1].

Theorem 7. *(Tychonoff)* $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_0$ のどの有限部分族も被覆でないとき $\mathcal{U}$ は被覆でない。

Proof. 次の集合を考える。

$$\Omega(\mathcal{U}) = \{\mathcal{V} \subset \mathcal{O}_0 \,|\, \mathcal{V} \supset \mathcal{U},\quad \mathcal{V}\text{ のどの有限部分族も }\textstyle\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\text{ の被覆でない。}\}$$

各 $\mathcal{V} \in \Omega(\mathcal{U})$ と各 $\alpha \in A$ に対して $w_\alpha(\mathcal{V}) \subset \mathcal{O}_\alpha$ を次で定義する。

$$w_\alpha(\mathcal{V}) = \{w_\alpha(V) : V \in \mathcal{V}\}$$

Claim 8. $\mathcal{V} \in \Omega(\mathcal{U})$ に対して $w_\alpha(\mathcal{V})$ はどの有限部分族も X_α の被覆でない。

Proof. $p_\alpha^{-1}(w_\alpha(V)) \subset V$ より $\{p_\alpha^{-1}(w_\alpha(V)) : V \in \mathcal{V}\}$ の有限部分族は $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ の被覆でない。
これと主張は同値。 □

Claim 9. $\mathcal{V} \in \Omega(\mathcal{U})$ に対して次が成立する：

$$\bigcup_{\alpha\in A} p_\alpha^{-1}\left(\bigcup_{w\in w_\alpha(\mathcal{V})} w\right) \neq \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$$

Proof. X_α のコンパクト性と Claim 8 から次がいえるためである：$\bigcup_{w\in w_\alpha(\mathcal{V})} w \neq X_\alpha$ □

Claim 10. $\Omega(\mathcal{U})$ は包含関係に関して帰納的であり、*Zorn* の補題から極大元をもつ。

Proof. まず、$\mathcal{U} \in \Omega(\mathcal{U})$ なので $\Omega(\mathcal{U})$ は空でない。
また、空でない全順序部分集合に対して、その和集合は再び $\Omega(\mathcal{U})$ に属する。 □

Claim 11. $\mathcal{V}_\infty$ を極大元とする。

1. $V, V' \in \mathcal{O}_0$ に対して次が成立： $V \subset V' \in \mathcal{V}_\infty \Longrightarrow V \in \mathcal{V}_\infty$
2. $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}_\infty$ が $\#\mathcal{F} < +\infty$ を満たせば次が成立： $\bigcap_{V\in\mathcal{F}} V \in \mathcal{V}_\infty \Longrightarrow \exists V \in \mathcal{F}(V \in \mathcal{V}_\infty)$

[*1] いいかえると $w_\alpha(U)$ は等式 $(X_\alpha \setminus w_\alpha(U)) = \overline{p_\alpha(X \setminus U)}$」によって特徴付けられる.

Proof. 各々次の論拠によって対偶が示される。
(1) 各有限集合 $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_\infty$ に対して、次の包含関係から、左辺が全体と一致すれば右辺も同様。

$$\left(V \cup \bigcup_{W \in \mathcal{F}} W \right) \subset \left(V' \cup \bigcup_{W \in \mathcal{F}} W \right).$$

(2) 各 $V \in \mathcal{F}$ に対して有限集合 $\mathcal{F}_V \subset \mathcal{O}_\infty$ が指定されると、次の包含関係において、左辺が全体と一致すれば右辺も同様。

$$\bigcap_{V \in \mathcal{F}} \left(V \cup \bigcup_{W \in \mathcal{F}_V} W \right) \subset \left(\bigcap_{V \in \mathcal{F}} V \right) \cup \left(\bigcup_{V \in \mathcal{F}} \bigcup_{W \in \mathcal{F}_V} W \right).$$

□

Claim 12. $\mathcal{V}_\infty$ が極大元であるとき次が成立：

$$\bigcup_{\alpha \in A} p_\alpha^{-1} \left(\bigcup_{w \in w_\alpha(\mathcal{V}_\infty)} w \right) \supset \bigcup_{V \in \mathcal{V}_\infty} V$$

Proof. 右辺の各点 x に対して、$x \in V \in \mathcal{V}_\infty$ となる V をとる。
・V は開集合なので有限集合 $B \subset A$ と各 $\beta \in B$ に対する $u_\beta \in \mathcal{O}_\beta$ が存在して次をみたす。

$$x \in \bigcap_{\beta \in B} p_\beta^{-1}(u_\beta) \subset V \in \mathcal{V}_\infty$$

・Claim 11 によりある $\beta \in B$ に対して $p_\beta^{-1}(u_\beta) \in \mathcal{V}_\infty$.
・この β に対して $u_\beta = w_\beta(p_\beta^{-1}(u_\beta)) \in w_\alpha(\mathcal{V}_\infty)$
・よって $x \in p_\beta^{-1}(u_\beta)$ は左辺に属する。 □

Claim 9, Calim 12 によって極大元 $\mathcal{V}_\infty$ は被覆でなく、その部分族である $\mathcal{U}$ も被覆でない。 □

3 第二の証明

証明のために、まず言葉を準備する。
・各 $B \subset A$ に対する $\prod_{\alpha \in B} X_\alpha$ の元 s を「部分的切断」と呼ぶことにし $B = dom(s)$ と書く。
・部分的切断全体の集合を Ω_0 とおき、Ω_0 上の順序 $s \leq t$ を定義域の制限として定める：

$$s \leq t \Longleftrightarrow ((dom(s) \subset dom(t)) \wedge \forall \alpha \in dom(s) \ \ (s(\alpha) = t(\alpha)))$$

・部分的切断 s と開集合分布 v との関係 $s \in' v$ を次で定める。

$$s \in' v \Longleftrightarrow (\mathrm{supp}(v) \subset dom(s) \ \wedge \ \forall \alpha \in \mathrm{supp}(v) \ \ (s(\alpha) \in v(\alpha)))$$

・部分的切断 s であって $dom(s) = A$ を満たすものが $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ の元に他ならない。
・$dom(s) = A$ のとき $s \in' v$ と $s \in U(v)$ は同値である。

Proof of Theorem 2. Theorem 2 の前提が成立したとする。
次の性質が成立する部分的切断 $s \in \Omega_0$ の全体を $\Omega(\Gamma)$ とおく：

$$(\forall v \in \prod_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha)\ (\forall \Delta \subset \Gamma) \left((s \in' v) \wedge (\#\mathrm{supp}(v),\, \#\Delta < +\infty) \Longrightarrow U(v) \not\subset \bigcup_{u\in\Delta} U(u) \right)$$

$\Omega(\Gamma)$ は Ω_0 の部分集合として順序集合。Zorn の補題によって、証明は次の 3 個の主張に帰着する。

Claim 13. $s_0 \in \Omega(\Gamma)$ が $dom(s_0) = A$ であれば $s_0 \in \left(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus \bigcup_{u\in\Gamma} U(u)\right)$

Claim 14. $\Omega(\Gamma)$ の極大元 s_0 に対して $dom(s_0) = A.$

Claim 15. $\Omega(\Gamma)$ は帰納的順序集合。

Proof of Claim 13. $dom(s_0) = A$ となる $s_0 \in \Omega(\Gamma)$ を考える。
ある $u_0 \in \Gamma$ に対して $s_0 \in U(u_0)$ であったとする。次の (1)(2) から $s_0 \notin \Omega(\Gamma)$ となり矛盾.
(1) $dom(s_0) = A$ かつ $s_0 \in U(u_0)$ であるから $s_0 \in' u_0$.
(2) $\Delta = \{u_0\}$ に対し $U(u_0) = \bigcup_{u\in\Delta} U(u)$ □

Proof of Claim 14. $s_0 \in \Omega(\Gamma)$ と $\alpha_0 \notin dom(s_0)$ が与えられたとする。
各 $a \in X_{\alpha_0}$ に対して部分的切断 $s_a \in \Omega_0$ を次で定める。

$$dom(s_a) = dom(s_0) \cup \{\alpha_0\}, \quad s_a(\alpha) = \begin{cases} s_a(\alpha) & (\alpha \in dom(s)) \\ a & (\alpha = \alpha_0) \end{cases}$$

・このとき $s_a > s_0$ である. ある a に対して $s_a \in \Omega(\Gamma)$ となることを背理法で示す。
・仮にすべての $a \in X_{\alpha_0}$ に対して $s_a \notin \Omega(\Gamma)$ だったとする。
・このとき任意の $a \in X_{\alpha_0}$ に対してある開集合分布 v_a と有限部分集合 $\Delta_a \subset \Gamma$ が存在し、

$$\#\mathrm{supp}(v_a) < +\infty, \quad \mathrm{supp}(v_a) \subset dom(s_a), \quad s_a \in' v_a, \quad U(v_a) \subset \bigcup_{u\in\Delta_a} U(u).$$

・$a = s_a(\alpha_0) \in v_a(\alpha_0)$ であるから

$$X_{\alpha_0} = \bigcup_{a\in X_{\alpha_0}} v_a(\alpha_0)$$

・X_{α_0} のコンパクト性から有限部分集合 $T \subset X_\alpha$ が存在し、

$$X_{\alpha_0} = \bigcup_{a\in T} v_a(\alpha_0).$$

・T の有限性から、開集合分布 v_0 を次のように定めることができる：

$$v_0(\alpha) = \begin{cases} \bigcap_{a\in T} v_a(\alpha) & (\alpha \in dom(s_0)) \\ X_\alpha & (\alpha \notin dom(s_0)) \end{cases}$$

・T の有限性から $\mathrm{supp}(v_0) = \cup_{a\in T}\mathrm{supp}(v_a)$ は有限集合である。
・このとき次の (1) が成立する。あとは次の (2) を示せば $s_0 \in \Omega(\Gamma)$ と矛盾して証明は終わる。
(1) $s_0 \in' v_0$ かつ $\mathrm{supp}(v_0) \subset dom(s_0)$

(2)$\Delta = \bigcup_{a \in T} \Delta_a$ は次を満たす：$U(v_0) \subset \bigcup_{u \in \Delta} U(u)$.
・各 $t \in U(v_0)$ に対して、$t \in \bigcup_{u \in \Delta} U(u)$ をチェックすれば (2) の証明は終わる.
・$t(\alpha_0) \in v_a(\alpha_0)$ となる $a \in T$ をとる.
・次の包含関係があるため、$t \in U(v_a)$ を示せば十分.

$$U(v_a) \subset \bigcup_{u \in \Delta_a} U(u) \subset \bigcup_{u \in \Delta} U(u).$$

・$\mathrm{supp}(v_a) \subset dom(s_a) = dom(s_0) \cup \{\alpha_0\}$ なので、これは次から ok

$$t(\alpha) \in \begin{cases} v_0(\alpha) \subset v_a(\alpha) & (\alpha \in dom(s_0)) \\ v_a(\alpha_0) & (\alpha = \alpha_0) \end{cases}$$

□

Proof of Claim 15. $\mathcal{S}$ を $\Omega(\Gamma)$ の全順序部分集合とし、$\mathcal{S}$ の上界の存在を示したい。
・$\mathcal{S}$ は全順序なので部分的切断 s_∞ であって次を満たすものが存在する。

$$dom(s_\infty) = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} dom(s), \quad s_\infty(\alpha) = s(\alpha) \quad (\text{if } \alpha \in dom(s) \text{ for some } s \in \mathcal{S})$$

・$s_\infty \in \Omega(\Gamma)$ であれば s_∞ が $\mathcal{S}$ のひとつの上界である。
・背理法を用いる。$s_\infty \notin \Omega(\Gamma)$ と仮定する。
・このとき、ある開集合分布 v_∞ と有限部分集合 $\Delta \subset \Gamma$ で次を満たすものが存在する。

$$\#\mathrm{supp}(v_\infty) < +\infty, \quad \mathrm{supp}(v_\infty) \subset dom(s_\infty), \quad s_\infty \in' v_\infty, \quad U(v_\infty) \subset \bigcup_{u \in \Delta} U(u)$$

・$\mathrm{supp}(v_\infty) \subset dom(s_\infty) = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} dom(s)$ かつ $\{dom(s) : s \in \mathcal{S}\}$ が $\subset$ について全順序である。
・よって、$\#\mathrm{supp}(v_\infty) < +\infty$ から、ある $s_0 \in \mathcal{S}$ に対して　　$\mathrm{supp}(v_\infty) \subset dom(s_0)$.
・このとき次が成立する。これから $s_0 \notin \Omega(\Gamma)$ となり矛盾。

$$\#\mathrm{supp}(v_\infty) < +\infty, \quad \mathrm{supp}(v_\infty) \subset dom(s_0), \quad s_0 \in' v_\infty, \quad U(v_\infty) \subset \bigcup_{u \in \Delta} U(u)$$

□

第二の証明終 □

4　文献について

（1）　このノートの「第一の証明」は Alexander's subbase lemma に基づく証明に示唆された。この証明についてはたとえば次を参照[*2]。
- Walter Rudin, Functional Analysis, Appendix A, page 368, (1973) McGraw-Hill.

[*2] Web 上では Rudin の教科書と同じ議論は例えば次に紹介されている。
Chad Wildman UCSD の講義 Real Analysis Qual Prep 2010 review material より"A proof of Tychonoff's theorem" `http://www.math.ucsd.edu/~cwildman/qualprep/tychonoff.pdf`

議論に用いる帰納的順序集合の大きさを、一般の開集合族へと拡大した Section 2.3 の議論は、以下の文献の[*3] よく知られた方法とほとんど同一のものである。

- L.H. Loomis, An introduction to abstract harmonic analysis, (1953) page 11, van Nostrand.

Loomis の文献の方法はきわめて短い。この方法で使われる帰納的順序集合の大きさはさらに大きく、開集合でない部分集合族をも含んでいる。

ここまで拡大すると、この方法は後述の「超フィルターによる方法」の双対と見ることができる。

（２）　このノートの「第二の証明」は次の論文の超限帰納法による議論を Zorn の補題によって言い換えたものである。

- D. G. Wright, Tychonoff's theorem, Proc. A.M.S. 120 (1994) 985-987.

`http://www.ams.org/journals/proc/1994-120-03/`

上の論文には二つの議論が紹介されている。ひとつは complete accumlation point を用いた Tychonoff の原論文の方法である。このノートの「第二の証明」はこの論文のもうひとつの議論のアイディアに基づく。ただし、上の論文では開集合族の設定として積空間上の一般の開集合を採用しているが、このノートでは積位相の基底のみを考えている

5　他の証明方法

このノートではコンパクト性の定義として通常の開被覆を用いた（通常の）定義を利用した。

その背景には「位相の概念の開集合（あるい閉集合）による定式化」がある。

5.1　コンパクト性の言い換え

位相の概念は、他の同値な定式化も知られている。それに伴い、コンパクト性を同値な定義に言い換えられる。そららの言い換えを用いて Tychonoff の定理を証明する方法も知られている。

連続写像によって、開集合は逆方向に逆像として送られる。集合 X 上の概念で"逆方向に送られる概念"の典型例は、X 上の関数、あるいはそれを一般化した「X から固定された集合への写像やそれらの族」である[*4]。

コンパクト性の通常の定式化は、開集合族、閉集合族を利用して行われる。

一方、双対的な見方として、位相の概念を連続写像によって順方向に送られる概念を用いて定式化することもできる[*5]。素朴には、「点」が順方向におくられる。集合 X 上の"順方向に送られる概念"の典型例は X 上の点、あるいはそれを一般化した「ある集合から X への写像やそれらの族」である。具体的には「ネット」、「フィルター」の概念をつかって位相の概念の定式化が可能である。

順方向の概念を用いてコンパクト性の定義を述べるとき、モデルとなるのはユークリッド空間における「点列」あるいは「可算部分集合」、「集積点」、「極限点」である。

具体的には、次の概念が使われる：

[*3] 他の文献としてはたとえば
- 森田茂之「集合と位相空間」(2002)　朝倉書店
Web 上では Pierre-Yves Gaillard `http://www.iecn.u-nancy.fr/~gaillapy/DIVERS/Tycho/`

[*4] 例１：X の部分集合は、$\{0,1\}$ への写像と思える。
例２：「ある集合から X への写像」は「引き戻し」によって逆方向に送られる．エタール射と底変換はその例である。

[*5] 位相の概念を定式化する第三の方法として、集合の上の自己写像を用いるものもある：閉包、開核

（１）無限部分集合 (可算濃度とは限らない)
（２）ネット（有向点族　Moore-Smith 1927)、
（３）フィルター（Cartan/Bourbaki 1936）

5.2　集積点

（１）の部分集合に対しては、集積点の概念の濃度を用いた精密化として complete accumulation point がある。[*6]

（１）による Tychonoff の原証明 (1930) は、濃度の算術にある程度親しんでいれば意味はわかりやすい。

（２）のネットに対しては集積点は自然に定義される。（２）を用いた Chernoff (1992) による証明[*7] では Bolzano-Weierstrass の定理ときわめて類似した議論が用いられやはり直感的にわかりやすい。

（３）のフィルターは次の意味で一般化になっている。

・部分集合には相対位相がはいり、それを用いてフィルターを作ることができる。

・ネットには順序構造があり、それを用いてフィルターを作ることができる。

5.3　極限点

コンパクト性を示すには、適当なコンパクト化と一致していればよい。実際にコンパクト化を構成するのではなくとも、望ましいコンパクト化が存在する場合に無限遠点として付け加えるべき「点」を考察することはできる。前述の種々の方法では部分列を繰り返し選択する操作が Zorn の補題とともにそれぞれに現れる。「コンパクト化」にあたるものを構成する立場では、それら前述の方法の議論中の部分列をとる操作のあらゆる可能性が、いわば定義の中にあらかじめ盛り込まれている。そのため定義のあとの議論は短く集約できる。ただ「あらゆる可能性」の枚挙それ自身のため Zorn の補題が必要となり、構成された道具は、選択公理抜きの具体的構成が不可能な対象となる。コンパクト化の際に付け加えるべき点を示唆する対象は、

（２）では普遍ネット（universal net)、

（３）では超フィルター（ultrafilter）

によって与えられる。これらはいわば「完備化における Cauchy 列」と比される役割を果たす。歴史的には後者を用いた議論による証明が先に与えられた (ブルバキ 1936) [*8]。前者を用いた議論による証明はその後である (Kelly 1950)。超フィルターによるコンパクト性の特徴づけの変形として、non-standard model によるコンパクト性の特徴づけがある[*9]。

[*6] ”=”vollständige Häufungspunkte. Alexandroff-Uryshon によるコンパクト性の complete accumulation point による特徴付けが 1929 年（整列された非増大閉集合列が共通点を持つという特徴付けとともに）.

[*7] - P.N. Chernoff ”A simple proof of Tychonoff’s theorem via nets”, American Mathematical Monthly 99,(1992), 932-934, `http://www.jstor.org/pss/2324485`

- Volker Runde’s ”A taste of topology”　(2005) Springer-Verlag

Web 上では次の説明があるが、Tychonoff の定理の証明は概略のみ。

- John Terilla 2010 `http://math.hunter.cuny.edu/mbenders/notes4.pdf`

Tychonoff の定理の証明は次がわかりやすい（原論文の議論を少し改良したもの)。

- Ken Ross ”Set Theory Appendix” (Proof due to Paul Chernoff (1992), with an improvement by Charles Pugh (2003)) `http://math.uoregon.edu/people/ross/SetTheoryAppendix.pdf`

[*8] たとえば斎藤毅「集合と位相」8.2 章

[*9] 正確には超積によって構成された non-standard model の場合に関係がある. Non-standard model 自身はより一

6　Zorn の補題によって存在が保証される対象について

以下、現時点での雑駁な感想である。

このノートで与えた二通りの議論のうち、第一の方法は集積点を考察する議論と、いわば双対の関係にある。第二の方法は、半分だけ集積点を用いている。しかしいずれにせよ、集積点を考察する方法とその双対では、Zorn の補題[*10]は、幾何学的に限定された具体的順序集合に対して一度だけ適用される。試練、あるいは「テスト関数」にあたるのは、コンパクト性を否定しかねない開集合族や cluster point を持たないかもしれないネットであり、それが与えられるたびに Zorn の補題が発動される。

一方、集積点ではなく極限点を考察する方法では、コンパクト性の判定条件の道具自体が、Zorn の補題によって構成されている。すなわち、コンパクト性を否定しかねないその都度の「テスト関数」自身が Zorn の補題によって初めて存在が保証される。

- 限定なしのあらゆる可能性まで突っ走って、その先の極大元の存在をいえるなら、限定の仕方を設定しない分だけ、議論は簡略化される。
- 限定された可能性の中の、意味がはっきりした極大元は求める命題の証明のために十分であり、議論の構造は命題の性格を反映したものとなる。

Zorn の補題によって構成される極大元、ひとつひとつは、対象としてはとらえどころがない。

双対的な見方のうち、”超フィルターを隠した”方法では、結局そうした対象のひとつだけを考察する。このとき、この道具は Tychonoff の定理の証明等の議論を著しく簡略化するメカニズムとして機能する[*11]。

一方、ひとつずつはとらえどころのない「点」でも、「点全体の空間」を考えるとその性質が、メカニズムの全貌を反映しているかもしれない。

両者は Tychonoff の定理のような個々の命題の証明手段としては、論理的には同等である。

しかし「幾何学」と呼ばれる認識能力は、空間を対象として扱うときに発揮される。こうして定義される新しい対象の考察によって新たな知見が得られる場合は特に興味深いと思われる[*12]。

ここは、ふたつの双対的な見方の間に、各々の方向が現れる地点かもしれない。

般的な概念である.

[*10] あるいは超限帰納法

[*11] non-standard analysis もそうである

[*12] 例： Stone-Čech コンパクト化