Bernsteinの定理, Zornの補題, 濃度の演算

古田幹雄

2012 年 1 月 9 日*

・講義の補足として Bernstein の定理、Zorn の補題の証明、無限濃度の自乗の計算を紹介する
・Bernstein の定理[*1]の証明は、「直感的記述」と「形式的記述」を紹介。
・Zorn の補題[*2]の証明は、「元」を中心とした記述と、「切片」を中心とした記述を紹介。
・無限濃度の自乗については、整列可能定理と自乗の「連続性」を用いた議論を紹介。

1 Bernsteinの定理の証明

Theorem 1 (Bernstein)**.** X から Y への単射, Y から X への単射が存在するとき、X, Y 間に全単射が存在する。

次のように仮定を定式化する：
$Z = X \coprod Y$ に対して $h : Z \to Z$ を $h(X) \subset Y$ かつ $h(Y) \subset X$ となる単射とする。

Proof. **(直感的な記述)**
・Z を h 作用の軌道に分解する。
・軌道には次の３通りの可能性がある。
（１）長さが有限の偶数のもの、
（２） $\mathbf{Z}$ と同型なもの、

*2012/1/11 追加, 訂正, 1/16 付記, 1/23 Zorn の補題の証明についての脚注に追記

*1 Cantor-Bernstein の定理、Schröder-Bernstein の定理とも呼ばれる。この定理の歴史は錯綜しているようだが Dedekind の寄与も大きいらしい。1883 年に Cantor にこの問題を示された Dedekind は 1887 年に証明を与え、ノートに書き記したが発表しなかった。1898 年に Bernstein による選択公理に依存した証明が（Borel の本の Appendix で）出版された後の 1899 年に、Dedekind は自分の初等的証明を Cantor に示した。Dedekind のノートは 1932 年の Dedekind 全集において公にされたという。(G. Moore ”Zermelo’s Axiom of Choice: Its origins, development, and influence, Springer 1982 による)]

*2 この命題の歴史も錯綜しているようだが、Hausdorff, Kuratowski, その他の人々の寄与も大きいようである。この命題は、現在から見ると様々な同等な形式が可能である。しかし、それらの同等な述べ方の間の移行は、時代的制約、必要性の有無などの条件によっては自明ではないかもしれない。Hausdorff が 1909 年にひとつの同等な命題を示しており、それと独立に 1910-1912 年に Janiszewski, Mazurkiewicz, Zoretti がやはり同等な命題を示していたという。1911 年に Brouwer が自分の結果を述べるとき３人の結果を引用している、1922 年に Kuratowski が現代の定式化に近い形に述べたとき、Brouwer 等の結果を引用している。1927 年に Hausdorff が J. M. Z. 達の定式化に言及している。Bochner は 1928 年にこの原理を使っているがそこでは 1914 年の Hausdorff の文献を引用しているという。1933 年に Zorn は Hausdorff, Kuratowski の先行研究を知らず、（補題などではなく）選択公理に代わる「原理」として挙げた。また、この原理が逆に選択公理を導くことを（Aritin との議論を経て）見出した。1934 年アメリカに渡った Zorn に Lefschetz が出版を勧め、Lefschetz のいたプリンストンでは Zorn’s lemma と呼ばれた。ブルバキが一般の順序集合に対する定式化で述べたとき le théorème de Zorn と呼んだ。以上、P.J. Cambell, ”Origin of ”Zorn’s lemma”, Historia Mathematica,(1978), 5, 77-89, に依拠した説明である。なおそこに載っている Zorn 自身の証言は興味深い。Zorn 自身にとってはこの命題は”maximal principle”であったという。「I occasionally accept the term ”Zorn’s lemma,” or use it; but I always smile, to supply the quote marks.」

（３）$\mathbf{N}$ と同型なもの

・各々の軌道に含まれる X 成分と Y 成分との間で全単射の存在をいえばよい。

・（１）（２）場合では $h|_X, h|_Y$ のいずれも全単射を与える。

・（３）の場合はさらに次の二通りの可能性がある。

（３－１）軌道の起点（$0 \in \mathbf{N}$ にあたる元）が X に属する場合

（３－２）軌道の起点（$0 \in \mathbf{N}$ にあたる元）が Y に属する場合

・（３－１）の場合は $h|_X$ によって、（３－２）の場合は $h|_Y$ によって全単射が与えられる。 □

上の議論で使われた自然数の集合 $\mathbf{N}$ は、かなり高度な対象である[*3]。以下、$\mathbf{N}$ を隠した形式的な記述を行う。（３）の場合にあたる集合 A を抽出したい。また、（３－１）の場合（下の $A_X \cup h(A_X)$）と、（３－２）の場合（下の $A_Y \cup h(A_Y)$）にあたる集合も抽出したい。

Proof. **(形式的な記述)**

・(0) A を $Z \setminus h(Z)$ を含み $h(A) \subset A$ となるような Z の最小の部分集合とする。

（この性質をみたす部分集合のすべての共通部分である。）

・$(Z \setminus h(Z)) \cup h(A)$ はふたたびこの性質をもつので A に等しい。すなわち $Z \setminus A = h(Z) \setminus h(A)$.

・h は単射なので $= h(Z \setminus A)$. よって h は $Z \setminus A$ 上で全単射。

・特に $(Z \setminus A) \cap X$ と $(Z \setminus A) \cap Y$ とは h の制限によって全単射がある。

・(1) A_X を $X \setminus h(Y)$ を含み $h^2(A_X) \subset A_X$ となる $A \cap X$ の最小の部分集合とする。

・(2) A_Y を $Y \setminus h(X)$ を含み $h^2(A_Y) \subset A_Y$ となる $A \cap Y$ の最小の部分集合とする。

・次を示せば十分である。

Claim $A = A_X \cup A_Y \cup h(A_X) \cup h(A_Y)$ であり、これは disjoint union.

・まず、$A_X \cup A_Y \cup h(A_X) \cup h(A_Y)$ は性質 (0) を満たすので A 全体と一致する。

・よって $A_Y \cap h(A_X) = \emptyset$ かつ $A_X \cap h(A_Y) = \emptyset$ を示せばよい。

・どちらも同様なので全射を示す。

・$(X \setminus h(Y)) \cup h^2(A_X)$ は (1) の性質をみたすので A_X と一致。すなわち $X \setminus A_X = h(Y) \setminus h^2(A_X)$

・h は単射なので $= h(Y \setminus h(A_X))$

・h をほどこすと $h(X \setminus A_X) = h^2(Y \setminus h(A_X))$

・左辺は h の単射性から $h(X) \setminus h(A_X)$ に等しく、$Y \setminus h(A_X)$ に含まれる。

・これは $Y \setminus h(A_X)$ が (2) の性質を満たすことを意味する。

・よって $A_Y \subset Y \setminus h(A_X)$ すなわち $A_Y \cap h(A_X) = \emptyset$. □

2 Zorn の補題の証明

Theorem 2 (Zorn の補題)**.** 帰納的順序集合 X に対して極大元が存在する

順序数の概念を利用しないひとつの証明の、同等な二通りの記述を行ってみる[*4]。

[*3] その存在は「無限公理」によって保証される。なお、自然数の定義は自然数全体の集合の存在とは独立に可能であり、厳密には無限公理をこの議論で使う必要はない

[*4] (2012/1/23) 証明中の f は「A の上界全体の集合と A' の上界全体の集合が一致し、空でないとき、$f(A) = f(A')$」となるように取れる。実際、その「空でない上界全体の集合」からひとつの元を選べばよい。次の Weston の論文では、このように f をとり、議論を大幅に簡易化している。

J. D. Weston, "A short proof of Zorn's Lemma", Archiv der Mathematik,8, 279

`http://www.springerlink.com/content/h757506v44002719/`

Proof. **(全順序集合の元を中心として用いた記述)** 背理法と選択公理を用いる。

[**Step 1**] $a \in X$ に対して $S(a) = \{x \in X | x < a\}$ と書く．選択公理を用いて、X の各整列部分集合 A に対し、A に属さないひとつの上界 $f(A)$ を対応させる. 次を考える.

$$\Omega = \{A \subset X | A : \text{整列} \wedge \forall a \in A\, (a = f(S(a) \cap A))\}$$

[**Step 2**] Ω に属する２つの整列部分集合 A, A' を比較する. 次の集合を考える.

$$A'' = \{a \in A \cap A' \,|\, S(a) \cap A = S(a) \cap A'\}$$

○**主張１**　「$a \in A''$ に対して $S(a) \cap A = S(a) \cap A' \subset A''$.」

○**主張１の証明**：$S(a) \cap A = S(a) \cap A'$ の任意の要素 b は、 $b \in A \cap A'$ かつ $b < a$ を満たす.b に対して $S(b) \cap A = S(b) \cap A'$ の成立をチェックする.$b < a$ より $S(b) \subset S(a)$ なので

$$S(b) \cap A = S(b) \cap (S(a) \cap A) = S(b) \cap (S(a) \cap A') = S(b) \cap A' \quad \square$$

○**主張２**　「$A'' = A$ または $A'' = A'$ である．　特に $A \cap A' \subset A''$」

○**主張２の証明**：仮に $A'' \neq A, A'$ だと仮定し、$a_0 = \min(A \setminus A'')$, $a'_0 = \min(A' \setminus A'')$ とおく. 第一に $a_0, a'_0 \notin A''$ と主張１から、任意の $a \in A''$ に対して $a_0, a'_0 \notin S(a) \cap A = S(a) \cap A'$. この時、大小を比較可能な組 $a, a_0 \in A$ および $a, a'_0 \in A'$ に対して $a \leq a_0$ および $a \leq a'_0$ となる. また $a \in A''$ および $a_0, a'_0 \notin A''$ から $a \neq a_0, a'_0$. よって $a \in S(a_0) \cap S(a'_0)$ となる. これから

$$A'' \subset S(a_0) \cap A, \qquad A'' \subset S(a'_0) \cap A''$$

第二に a_0, a'_0 の定義における各々の最小性から次の包含関係が成立する.

$$A'' \supset S(a_0) \cap A, \qquad A'' \supset S(a'_0) \cap A''$$

これら４個の包含関係から

$$S(a_0) \cap A = A'' = S(a'_0) \cap A'$$

である. このとき、A, A' が Ω に属し、かつ $a_0 \in A$, $a'_0 \in A'$ であることから

$$a_0 = f(A'') = a'_0.$$

となる. この等しい元を改めて a''_0 とおくと $a''_0 \in A \cap A'$ かつ $S(a''_0) \cap A = A'' = S(a''_0) \cap A''$ である．よって A'' の定義から $a''_0 \in A''$．これは $a''_0 = a_0 \notin A''$ と矛盾する. $\square$

[**Step 3**]　「$A_\infty = \cup_{A \in \Omega} A$ とおくと $A_\infty \in \Omega$」

○**証明**：各 $a \in A_\infty$ に対して a を含むふたつの $A, A' \in \Omega$ を考える．Step 2 の記号を使うと主張１から $a \in A \cap A' \subset A''$ である. すなわち $S(a) \cap A = S(a) \cap A'$. ここで A, A' は任意だったので、この集合は $S(a) \cap A_\infty$ とも等しい. 特に、$S(a) \cap A_\infty$ は整列集合 A の部分集合なので整列集合.$a \in A_\infty$ は任意だったので、よって A_∞ 自身が整列集合．また $A \in \Omega$ より $a = f(S(a) \cap A)$ である．これから $a = f(S(a) \cap A_\infty)$ を得る． $\square$

[**Step 4**] 矛盾を出す．$a_\infty = f(A_\infty) \notin A_\infty$ に対して $A_! = A_\infty \cup \{a_\infty\}$ とおく.$A_! \in \Omega$ を示す．もしこれが言えれば $a_\infty \in A_! \setminus A_\infty = A_! \setminus \cup_{A \in \Omega} A = \emptyset$ となって矛盾する．第一に、a_∞ が整列集合 A_∞ の上界であることから $A_!$ も整列集合である. 第二に、上界 a_∞ は A_∞ に属さないため $S(a_\infty) \cap A_! = A_\infty$ となる．よって $f(S(a_\infty) \cap A_!) = a_\infty$ となる．第三に、$a \in A_\infty$ については $A_! \in \Omega$ および $S(a) \cap A_! = S(a) \cap A_\infty$ から $f(S(a) \cap A_!) = a$ となる．以上から $A_! \in \Omega$ であり**証明は完結した.** $\square$

Proof. **(全順序集合の切片を用いた記述)** [*5] 背理法と選択公理を用いる.

[**準備**]： 全順序集合の「切断」についての一般論を確認する.

X の全順序部分集合 A, B に対して関係 $\leq$ を

$$A \leq B \Longleftrightarrow A \subset B \wedge \ \forall x, y \in X (x \in A \wedge y \in B \setminus A \ \Longrightarrow x < y)$$

によって定義し、$A \leq B$ かつ $A \neq B$ のとき $A < B$ と書くことにする. すると、次が成立する.

(1) $A < B \wedge b = \min(B \setminus A) \Longrightarrow A \cup \{b\} \leq B$

(2) $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は $A_\lambda \leq B$ となる族 $\Longrightarrow \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \leq B$

(3) $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は $C \leq A_\lambda \subset B$ となる族 $\Longrightarrow C \leq \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$

(4) （$A \leq B \wedge A' \leq B$） $\Longrightarrow$ （$A \leq A' \vee A' \leq A$）

(5) $A \leq B \wedge K \subset A \wedge a = \min(A \setminus K) \Longrightarrow a = \min(B \setminus K)$

(6)$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は $A_\lambda \leq B$ となる族. すべての A_λ が整列集合 $\Longrightarrow$ $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は整列集合.

[**Step 1**] X の各整列部分集合 A に対し、A に属さないひとつの上界 $f(A)$ を対応させる. 次を考える.

$$\Omega = \{A \subset X | A : \text{整列} \wedge \forall C < A \ f(C) = \min(A \setminus C)\}$$

[**Step 2**] 「Ω に属する 2 つの整列部分集合 A, A' に対して $A \leq A'$ または $A' \leq A$」を示す.

・$T = \{B \subset X \,| B \leq A, \ B \leq A'\}$ に対して $B_\infty = \cup_{B \in T} B$ とおくと (2) から $B_\infty \in T$.

・$B_\infty = A$ または $B_\infty = A'$ を示せばよい. もしそうでなければ $B_\infty < A$ かつ $B_\infty < A'$ となる.

・このとき $A, A' \in \Omega$ から $\min(A \setminus B_\infty) = f(B_\infty) = \min(A' \setminus B_\infty)$

・すると (1) から $B_\infty \cup f(B_\infty) \leq A, A'$ すなわち $B_\infty \cup f(B_\infty) \in T$ となる

・これは B_∞ の取り方と矛盾. □

[**Step 3**] 「$A_\infty = \cup_{A \in \Omega} A$ とおくと $A_\infty \in \Omega$」を示す.

・Step 2 より A_∞ は全順序集合.

・Step 2 から任意の $A_0 \in \Omega$ に対して、$A_\infty = \cup_{A \in \Omega, A \geq A_0} A$.

・よって (3) から任意の $A_0 \in \Omega$ に対して $A_\infty \geq A_0$.

・特に (6) から $A_\infty = \cup_{A_0 \in \Omega} A_0$ は整列集合.

・任意の $B < A_\infty$ と任意の $A_0 \in \Omega$ に対して、(4) から $B \leq A_0$ または $A_0 \leq B$.

・A_0 を $A_0 \setminus B \neq \emptyset$ となるようにとると $A_0 \leq B$ と $A_0 = B$ は不成立.

・この A_0 に対して $B < A_0$.

・このとき (5) から $\min(A_\infty \setminus B) = \min(A_0 \setminus B) = f(B)$. □

[**Step 4**] 矛盾を出す.

・$a_\infty = f(A_\infty) \notin A_\infty$ に対して $A_! = A_\infty \cup \{a_\infty\}$ とおく.

・$A_! \in \Omega$ を示す. もしこれが言えれば $a_\infty \in A_! \setminus A_\infty = A_! \setminus \cup_{A \in \Omega} A = \emptyset$ となって矛盾する.

・a_∞ が整列集合 A_∞ の上界であることから $A_! = A_\infty \cup \{a_\infty\}$ も整列集合である.

・$B < A_!$ となる B を考える. $A_!$ の最大値 a_∞ は B に属さない. よって $B \leq (A_! \setminus \{a_\infty\}) = A_\infty$.

・もし $B < A_\infty$ であれば $A_\infty \in \Omega$ より $f(B) = \min(A_\infty \setminus B) = \min(A_! \setminus B)$.

・もし $B = A_\infty$ であれば $f(B) = a_\infty = \min(A_! \setminus A_\infty)$.

・以上から $A_! \in \Omega$ であり 証明は完結した. □

[*5] 次の議論を参考にした. D.R. Grayson ”Zorn’s lemma” 2007, `http://www.math.uiuc.edu/~dan/ShortProofs/`

3 整列順序の比較可能定理、濃度の比較可能定理、整列可能定理

Bernstein の定理と Zorn の補題（およびその証明で使われた議論）によって次がわかる。

Theorem 3 (整列順序の比較可能性). P, Q を整列集合とする。このとき、次のいずれのひとつ、そしてひとつのみが成立。

1. P から Q への順序をたもつ単射 f であって $f(P) < Q$ となるものが一意に存在する。
2. P と Q との間に順序を保つ全単射が存在する。
3. Q から P への順序をたもつ単射 g であって $P > g(Q)$ となるものが一意に存在する。

Zorn の補題の証明の中であらわれた議論と同様に示される。詳細略。

Theorem 4 (濃度の比較可能性). X, Y を集合とする。このとき、次のいずれのひとつ、そしてひとつのみが成立。

1. X から Y への単射 f は存在するが全射は存在しない。
2. X と Y との間に全単射が存在する。
3. Y から X への単射 f は存在するが全射は存在しない。

上の三通りのケースを

$$\operatorname{Card} X < \operatorname{Card} Y, \quad \operatorname{Card} X = \operatorname{Card} Y, \quad \operatorname{Card} X > \operatorname{Card} Y$$

と略記することにする。
濃度の比較可能定理は、Bernstein の定理と Zorn の補題を用いて示される。詳細略。
あるいは次の定理を用いて整列順序の比較可能定理に帰着させることもできる。

Theorem 5 (整列可能定理). 任意の集合の上に、整列順序が存在する。

これは Zorn の補題を用いて示される。あるいは Zorn の補題の証明と同様の議論によっても示される。詳細略。

4 濃度の演算

濃度の演算についての基本事項を示す。ここでは上の二種の比較可能定理を使う方法を紹介する。
$f(A)$ を次のいずれかの略記と仮定する[*6][*7]

- $f(A) = A \coprod \{0\}$
- $f(A) = A \coprod A$

[*6] A があらゆる集合をわたるので、f は写像ではない。A としてある集合 X の部分集合のみを考えると $f(A)$ は特定の集合の部分集合のみがあらわれるので、X のベキ集合からその集合のベキ集合への写像として定式化もできる。以下の議論のためにはこの定式化でも十分である。

[*7] f は、集合と単射からなる「圏」から自分自身への「関手」となっている。

- $f(A) = A \times A$
- $f(A) = \{B \in P(A) : \#B < +\infty\}$

このとき f に対して次の性質が成立する。

1. $\mathrm{Card}\, A \leq \mathrm{Card}\, f(A)$
2. $\mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, B \Longrightarrow \mathrm{Card}\, f(A) = \mathrm{Card}\, f(B)$.
3. $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$
4. f は次の意味で「連続」: $\mathcal{S} \subset P(X)$ が包含写像によって全順序をなすとき
$$f(\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S) = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} f(S).$$
5. A が有限集合のとき $f(A)$ も有限集合.

ベキ集合をとる操作 $f(A) = P(A)$ は「連続性」を満たさないが、他の性質はすべて満たす。
まず次の Lemma 6 が示される。

Lemma 6. *A が可算集合のとき $f(A)$ も可算集合.*

Proof. $\mathbf{N}$ は有限集合の増加列の和集合としてあらわせる。$f(\mathbf{N})$ の上の整列順序を次のようにとる。
・各 $n \in \mathbf{N}$ に対して、$g(n) \subset f(\mathbf{N})$ を次で定める。

$$g(n) = f(\{m \in \mathbf{N} : m \leq n\}) \setminus f(\{m \in \mathbf{N} : m < n\})$$

・$g(n)$ は有限集合である。その整列順序をひとつとり $\leq_n$ とおく。
・f の「連続性」から $f(\mathbf{N}) = \coprod_{n \in \mathbf{N}} g(n)$ である。
・$f(\mathbf{N})$ の順序を次で定める。$a \in g(m)$, $b \in g(n)$ に対して

$$a \leq b \Longleftrightarrow (m < n \vee (m = n \wedge a \leq_n b)).$$

・$f(\mathbf{N})$ 上のこの順序は整列順序になる。
・$f(\mathbf{N})$ の任意の要素 a に対して $\{b \in f(\mathbf{N}) : b < a\}$ は有限。
・よって $f(\mathbf{N})$ は $\mathbf{N}$ に順序を保ったまま埋め込める。 □

この議論の一般化によって、次がわかる。

Theorem 7. *任意の無限集合 A に対して $\mathrm{Card}\, f(A) = \mathrm{Card}\, A$.*

Proof. 無限集合 A が仮に $\mathrm{Card}\, f(A) > \mathrm{Card}\, A$ を満たしたとする。
・A に整列順序をいれる。
・$f(A)$ の整列順序で次をみたすものをとれる　:
$B \leq B' \leq A \Longrightarrow f(B) \leq f(B') \leq f(A)$
∵ Lemma 6 の証明と同様の方法を用いる。各 $a \in A$ に対して $f(\{x \,|\, x \leq a\}) \setminus f(\{x, | \, x < a\}$ に整列順序 $\leq_a$ を固定し、これらと a の順序を合わせたものとすればよい。

・整列順序の比較可能定理から、順序を保つ $\phi : A \to f(A)$ であって $\phi(A) < f(A)$ となるものが一意に存在する。$\because \mathrm{Card}\, A < \mathrm{Card}\, f(A)$.

・$B \leq A$ となる無限集合 B であって $\mathrm{Card}\, f(B) > \mathrm{Card}\, B$ となる最小の B を B_0 とおく。

・このとき $f(B_0) > \phi(B_0)$.

・Lemma 6 から B_0 は非可算無限である。

・このとき $B < B_0 \Longrightarrow \mathrm{Card}\, f(B) < \mathrm{Card}\, B_0$.

$\because \mathrm{Card}\, f(B) \leq \mathrm{Card}\, B$ かつ $\mathrm{Card}\, B < \mathrm{Card}\, B_0$.

・よって $B < B_0 \Longrightarrow f(B) < \phi(B_0)$.

・よって $\cup_{B<B_0} f(B) \leq \phi(B_0)$.

・B_0 は最大値をもたない。すなわち $B_0 = \cup_{B<B_0} B$.

$\because B_0$ は有限でなくかつ $B < B_0 \Longrightarrow \mathrm{Card}\, B < \mathrm{Card}\, B_0$

・よって f の「連続性」から次も成立　：$f(B_0) = \cup_{B<B_0} f(B)$.

・あわせて、$f(B_0) = \cup_{B<B_0} f(B) \leq \phi(B_0) < f(B_0) \Longrightarrow$ 矛盾。 □

Remark 8. f の満たす条件の最後のものは、

$$\mathrm{Card}\, A < \aleph_0 \Longrightarrow \mathrm{Card}\, f(A) < \aleph_0$$

と同値である。この条件を、より一般に、ある濃度 $\aleph_\alpha$ に対して

$$\mathrm{Card}\, A < \aleph_\alpha \Longrightarrow \mathrm{Card}\, f(A) < \aleph_\alpha$$

と置き換えると、*Theorem 7* の結論は

$$\mathrm{Card}\, A \geq \aleph_\alpha \Longrightarrow \mathrm{Card}\, f(A) = \mathrm{Card}\, A$$

に置き換えると成立する。証明は同一である。

Remark 9. 上は、一種の挟み撃ちの議論であり、「基数」の順序型を上界として亀[*8]が下からアキレス[*9]を追い詰める。通常の「アキレスと亀」の議論ではアキレスは亀に追いつけない。ここで行っている「亀とアキレス」の議論は、亀がアキレスに追いつくことを主張するものである。f の「連続性」によって、アキレスといえども無限大を踏み越えるときにはジャンプできない。亀にとって無限大は追いつくチャンスである。

Remark 10. *Zorn* の補題を用いて f の各々に応じて個別の議論を行うことも可能である。それらの個別の議論を、整列順序の導入と「整列順序の比較可能定理」が一挙に代行しているともいえる。個別の議論にあらわれうるあらゆる操作の可能性を先取りして、整列順序という構造を付与しているともいえる[*10]。

[*8] $\phi(B)$

[*9] $f(B)$

[*10] これは実数の「non-standard analysis」における超積による超準モデルの構成において、超フィルターをひとつ固定することによって、元の列の部分列をとる操作のあらゆる可能性をあらかじめ整理して「無限小」とする定式化と幾分パラレルと見える。

5　付記：連続体仮説

Theorem 11 (Cantor (1891)). $\mathrm{Card}\, X < \mathrm{Card}\, P(X)$

証明略

「$\aleph_0 = \mathrm{Card}\, \mathbf{N}$ より大きく $2^{\aleph_0} = \mathrm{Card}\, P(\mathbf{N})$ より小さい濃度の非存在」を主張する命題が「連続体仮説」である。

連続体仮説は、公理的集合論に置かれている公理群 (選択公理も含めた ZFC) からは、その否定は証明不可能であり (Gödel 1940)、かつ、それ自身も証明不可能であること (Cohen 1963) が知られている[*11]。しかし、近年の集合論、数理論理学では、その先に踏み入った研究がなされているそうである。

次に解説がある。

> 渕野昌「Forcing Axioms と連続体問題–公理的集合論の最近の話題から」[*12]、
> 「数学」56 巻 No.3(2004)pp.248-259
> `http://mathsoc.jp/publication/dbase/sugaku/article001.html`

次は、上の論説の注 ”Added in 2003 December”からの引用である。

「連続体のサイズが $\aleph_2$ であるという主張が”正しい”命題であることの”状況証拠”がかなり増えた、と言うことができるように思える.」

なお、上の論説の 4 節に述べられている「generic absoluteness」とそれと関連した Ω-logic については次に解説がある。

> 依岡輝幸、「強制公理と Ω-論理」、科学基礎論研究 36(2) (2009)45–52
> `http://ir.lib.shizuoka.ac.jp/bitstream/10297/3508/1/090527001.pdf`

以下は上の論説の 3 節からの引用である。

「古典論理のもとでの ZFC では様々な数学的命題の真偽を決定できない。特に最も知りたかった連続体仮設の真偽すら決まらない。では、論理を強くすることによって連続体仮説の真偽を決定できないか。しかし、単に恣意的に古典論理を強くして、その論理の中で連続体仮説を決定しても、それはやはり知りたいこととは違うだろう。古典論理を”自然に”強くした論理を”発見”して、その中で連続体仮説の真偽を見ることはできないだろうか。(もちろんこれは、もしそんなものがあるのだとしたら、の話ではあるが。) ウディンの Ω-logic は古典論理を”自然に”強くした ZFC での論理ではないだろうか？」

[*11] ただし ZFC が無矛盾であった場合。矛盾した公理からはいかなる命題も証明可能である。

[*12] forcing を説明したテキストについて。現在の標準的なテキストからははずれるであろうし、古いものであるが、ロシア語から翻訳された Yu. I. Manin の次の本は、私のように数理論理学になれない者にはとっつきやすいかもしれないので敢えて紹介しておく。

”A course in mathematical logic”, Graduate Texts in Math. vol. 53, Springer-Verlag, 1977,

Forcing の本格的な説明の前にそのウォーミングアップとして、集合論を用いない、実数の（より単純な）公理系 $L_2 Real$ に対して”連続体仮説”を定式化し、その証明不可能性を示してある。

なお上の本と同じころに日本でもブール値モデルによる forcing の定式化を説明した教科書　難波完爾「集合論」(サイエンス社) が出版されていた。圧縮されたコンパクトな記述。最近復刊されているようである。

[(2012/1/17) 依岡輝幸さんから、次が標準的なテキストであるとご指摘をいただいた。

K. Kunen ”Set Theory – An Introduction to Independent Proofs” (1980), North-Holland

(邦訳 集合論 独立証明への案内, 藤田 博司, 日本評論社.)]