２００３年度線型代数学Ａ演習問題（’03.7.8(火) ９０分）

**問１．** 以下の各行列について,

$\mathbb{R}$ 上の階数を求めよ。

逆行列が存在するかどうか判定し、存在する場合にには逆行列を求めよ。

1) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

※必ずしも　　の順に解かなくても良い。

**問２．** 以下の $\mathbb{R}$-上の連立一次方程式系を解け。

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**問３．** $\mathfrak{S}_n$ で $n$-次の置換全体を表す。$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、$f_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$f_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ x_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

で定める。このとき、以下の問に答えよ。

1) 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、$f_\sigma$ は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ。
2) $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ とすると、$f_\tau \circ f_\sigma = f_{\sigma\tau}$ であることを示せ。
3) 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して、$f_\sigma$ は全単射であることを示せ。
4) $n = 3$、$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の時、$f_\sigma$ を行列で表示せよ。
5) $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の時、$f_\sigma$ が行列 $A_\sigma$ で表示されたとすると $\det A_\sigma = \operatorname{sgn} \sigma$ であることを示せ。