2022 年度幾何学 III 資料 2 v1 2022/11/17

・原則として講義の記号を用いる．

1. Lie 微分

問 1.1. X をベクトル場，$\{\varphi_t\}$ を X により定まる一径数局所変換群（フロー）とする．

1) $\left.\dfrac{\partial\varphi^i_{-t}}{\partial x^j}(\varphi_t(x))\right|_{t=0}\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ が成り立つことを示せ．

2)

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\frac{\partial\varphi^i_{-t}}{\partial x^j}(\varphi_t(x)) &= -\left.\frac{\partial^2\varphi^i_{-t}}{\partial t\partial x^j}(\varphi_t(x))\right|_{t=0}+\sum_i\left.\frac{\partial^2\varphi^i_{-t}}{\partial x^i\partial x^j}(\varphi_t(x))\frac{\partial\varphi^j_t}{\partial t}(x)\right|_{t=0}\\ &= -\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x)\end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．

問 1.2. X をベクトル場とし，$\{\varphi_t\}$ を X に附随する一径数局所変換群（フロー）とする．ω を (r,s) テンソルとすると，以下は同値であることを示せ．

1) $(\varphi_t)^*\omega=\omega$ が（絶対値が）十分小さな t について成り立つ．
2) $L_X\omega=0$ が成り立つ．

2. 縮約

V を線型空間とし，$V^{r,s}=V^r\otimes(V^*)^s$ とする．$r,s>0$ とすると，$1\leq i\leq r, 1\leq j\leq s$ について $\gamma_i{}^j\colon V^{r,s}\to V^{r-1,s-1}$ が

$$\begin{aligned}&\gamma_i{}^j(v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_s)\\ &=\varphi_j(v_i)\,v_1\otimes\cdots\otimes\widehat{v_i}\otimes\cdots\otimes v_r\otimes\varphi_1\otimes\cdots\otimes\widehat{\varphi_j}\otimes\cdots\otimes\varphi_s\end{aligned}$$

により定まる．次が成り立つ．

補題 2.1. $\pi\colon E\to M$ をベクトル束とする．$E^{r,s}=E^{\otimes r}\otimes(E^*)^s$ と置く．$r,s>0$ とすると，$1\leq i\leq r, 1\leq j\leq s$ について $\pi_i{}^j\colon E^{r,s}\to E^{r-1,s-1}$ が自然に定まる．
※ $\gamma_i{}^j$ はここでの記号である．なお，$\gamma_i{}^j$ は「バンドル写像」（あるいは「バンドル準同型」）である．

定義 2.2. $\gamma_i{}^j$ をテンソルの**縮約**（contraction）と呼ぶ．

例 2.3. 1) $\omega \in \Omega^1(U)$, $X \in \mathfrak{X}(U)$ とする．$X \otimes \omega \in \Gamma_U(T^{1,1}(U))$ である．${\gamma_1}^1 \colon T^{1,1}(U) \to T^{0,0}(U) = C^\infty(U)$ について，${\gamma_1}^1(X \otimes \omega) = \omega(X)$ が成り立つ．

2) ω を $(0,s)$-テンソル，$X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(U)$ とする．$\omega \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_s \in \Gamma_U(T^{s,s}M)$ であって，

$$\overbrace{{\gamma_1}^1 \circ {\gamma_1}^1 \circ \cdots \circ {\gamma_1}^1}^{s\,回}(\omega \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_s) = \omega(X_1, \ldots, X_s)$$

が成り立つ．

命題 2.4. Lie 微分と縮約は可換である．

縮約に関しては **Einstein の規約**が良く用いられる．T を (r,s)-テンソル場とし，局所的に

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s} T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

と表す．Einstein の規約は「同じ添字が上と下に現れる場合にはそれについては和を取る」というものである．例えば

$$T = T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

と表す．ただ，和を取らず文字通りの意味で右辺を表したい場合もあるので，そのような場合には注意書きをするなどの工夫が必要になる．

問 2.5. T を (r,s) テンソル場とし，局所的に

$$T = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_r \\ j_1,\ldots,j_s}} T^{i_1,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

と表す．$1 \le a \le r$，$1 \le b \le s$ とし，i_a と j_b に関して T の縮約を取って得られる $(r-1, s-1)$ テンソルを S とする．

1)

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i_1,\ldots,\widehat{i_a},\ldots,i_r \\ j_1,\ldots,\widehat{j_b},\ldots,j_s}} T^{i_1,\ldots,\overset{a}{\smile}\!\!\!\!k,\ldots,i_r}{}_{j_1,\ldots,\underset{b}{k},\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{dx^{j_b}} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

が成り立つことを示せ．

2) Eistein の規約を用いると，

$$S = T^{i_1,\dots,\overset{a}{\breve{k}},\dots,i_r}{}_{j_1,\dots,\overset{b}{\breve{k}},\dots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}$$
$$\otimes\, dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{dx^{j_b}} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

と表されることを確かめよ．

問 2.6. $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ の標準的な基底をそれぞれ $\mathscr{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$，$\mathscr{F} = \{f_1, \dots, f_m\}$ で表す．また，$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とし，$A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ を $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ に関する F の表現行列とする．そして，

$$\varphi = \sum_{i,j} f_i a_{ij} e_j^*$$

と定める．

1) $\varphi \in \mathbb{R}^m \otimes (\mathbb{R}^n)^*$ が成り立つことを示せ．テンソル積の順序はあまり気にしなくて良い（以下同様）．
2) $v \in \mathbb{R}^n$ について，

$$\varphi(v) = \sum_{i,j} f_i a_{ij} e_j^*(v)$$

と定めれば，

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n,\ F(v) = \varphi(v)$$

が成り立つことを示せ．
3) $v \in \mathbb{R}^n$ について $\varphi \otimes v \in \mathbb{R}^m \otimes (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$ を考える．$\gamma\colon \mathbb{R}^m \otimes (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を第二成分と第三成分に関する縮約とすると，$v \in \mathbb{R}^n$ について

$$\gamma(\varphi \otimes v) = F(v)$$

が成り立つことを示せ．

問 2.7. M を多様体とし，$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M の座標近傍系とする．また，$\varphi_\alpha(U_\alpha)$ の座標を $(x^{\alpha 1}, \dots, x^{\alpha n})$ とする．さて，$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 上で $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$ と置く．この時，以下は同値であることを示せ．

1) 各 $\alpha \in A$ について，U_α 上の函数族 $\{{T_\alpha}^{i_1,\dots,i_r}{}_{j_1,\dots,j_s}\}$ が定まっていて，

$${T_\beta}^{i_1,\dots,i_r}{}_{j_1,\dots,j_s} = {T_\alpha}^{k_1,\dots,k_r}{}_{l_1,\dots,l_s} (D\varphi_{\beta\alpha})_{k_1}{}^{i_1} \cdots (D\varphi_{\beta\alpha})_{k_r}{}^{i_r} (D\varphi_{\beta\alpha})^{l_1}{}_{l_1} \cdots (D\varphi_{\beta\alpha})^{l_s}{}_{j_s}$$

が成り立つ，ただし，$D\varphi_{\beta\alpha}$ の (i,j) 成分を $(D\varphi_{\beta\alpha})^i{}_j$，$(D\varphi_{\beta\alpha})^{-1}$ の (i,j) 成分を $(D\varphi_{\beta\alpha})_i{}^j$ でそれぞれ表す．

2)
$$T = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_r \\ j_1,\dots,j_s}} T_\alpha{}^{i_1,\dots,i_r}{}_{j_1,\dots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha i_r}} \otimes dx^{\alpha j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\alpha j_s}$$
とすると，T は大域的に定まった (r, s) テンソルである．

※ 伝統的には物理では前者の記述が，数学では後者の記述が好まれる傾向にある．

（以上）