２０１５年度数理科学基礎 I（理 I 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 3　2015/5/11（月）
'15/5/17：コーシーの平均値の定理の説明を修正（冒頭部分のみで，本質的な変更はない）.
'15/5/22：「$*$」のついている部分について体裁の変更.
'15/6/2：コーシーの平均値の定理の説明を再修正.

この演習は概ね第 7 回の講義に対応する.

問 3.1 (第 5 回). $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^m$ の点列とする．ここでは a_n を $a(n)$ で表すことにする．そして各 n について $a_n = a(n) = (a_1(n), \dots, a_m(n))$ と成分を用いて表す．$a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ とすると，以下は同値であることを示せ.

1) $n \to +\infty$ の時 $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ は a に収束する.
2) 任意の i, $1 \le i \le m$ について，$n \to +\infty$ の時 $(a_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$ は a_i に収束する.

ヒント：ベクトル値函数が連続であることは，各成分が実数値函数として連続であることと同値であった．その証明を真似してみよ（もう少し易しい）.

問 3.2. $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ とし，$f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f_k(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^k}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

により定める．f_k は C^∞ 級であることを示せ.

このような函数の使い方の例については例えば問 3.14 を参照のこと．ところで，定数函数 $0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $(-\infty, 0)$ 上 f_k と一致するが，f_k のいずれも 0 ではない．また，$f_k, f_{k'}$ は $(-\infty, 0)$ 上一致するが，$k \ne k'$ ならば $f_k \ne f_{k'}$ である．従って，講義で紹介した定理は C^∞ 級の函数については成り立たない.

問 3.3. $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ を函数とする．f が連続であることと，f のグラフ $x \mapsto (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ は I から $\mathbb{R}^2$ への写像として連続であることは同値であることを示せ.
注：ここでの「グラフ」は共通資料の用語とやや異なる.

問 3.4*. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が**コーシー（Cauchy）列**であるとは,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (m, n \in \mathbb{N},\ m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon)$$

が成り立つことを言う．$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が**収束列**である，即ち，ある $a \in \mathbb{R}$ について $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ が成り立つことと，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であることは同値であることを示せ.

※ この問は難しい（きちんとやろうと思うと実数の定義が絡んでくる）．参考書などで証明を調べ，理解できれば今のところは十分である．

定義. f を $\mathbb{R}$ 上定義された実数値函数とする．f が**奇函数**であるとは任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(-x) = -f(x)$ が成り立つことをいい，また，f が**偶函数**であるとは任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(-x) = f(x)$ が成り立つことをいう．

問 3.5. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を実数値函数とする．

1) $g(x) = f(x^2)$ とすると $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は偶函数であることを示せ．
2) $h(x) = xf(x^2)$ とすると $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は奇函数であることを示せ．

問 3.6. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は微分可能であるとする．

1) f が奇函数であれば $f(0) = 0$ が成り立つことを示せ．
2) f が奇函数であれば Df は偶函数であることを示せ．従って 1) により $Df(0) = 0$ が成り立つ．
3) f が偶函数であれば Df は奇函数であることを示せ．

偶函数・奇函数は特別な函数ではあるが，そう珍しい物でもない．

問 3.7. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とし，$g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$
$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

により定める．

1) $f = g + h$ が成り立つことを示せ．
2) g は偶函数，h は奇函数であることを示せ．

問 3.8. $W = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\}$, $U = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\}$ と置く．W は偶函数全体の，U は奇函数全体のなす空間である．$X = W$ あるいは $X = U$ とする．

1) $\varphi, \psi \in X$ ならば $\varphi + \psi \in X$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：平たく言えば偶函数（奇函数）同士の和は偶函数（奇函数）であることを示せ，ということである．
2) $\varphi \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$ ならば $\lambda\varphi \in X$ が成り立つことを示せ．

3) $\varphi, \psi \in X$ ならば $\varphi\psi \in W$ が成り立つことを示せ．また，$\varphi \in W,\ \psi \in U$ ならば $\varphi\psi \in U$ が成り立つことを示せ．

4) $f \in W \cap U$ ならば $f = 0$（右辺は定数函数 0 を表す）が成り立つことを示せ．

問 3.9 (問 3.8 の続き). $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\}$, $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\}$ と置く．

1) V は函数の和，定数倍により $\mathbb{R}$-線型空間（実線型空間）であることを示せ．また，W, U は V の $\mathbb{R}$-部分線型空間であることを示せ．
   ※ 定義を知っていれば難しくはないが，面倒ではある．線型空間や部分線型空間の定義はいずれ「線型代数学」で扱うので一度調べておくことを勧める．

2) $f \in V$ に対して，g, h を問 3.7 のように定める．すると写像 $\varphi\colon V \to W \times U$ が $\varphi(f) = (g, h)$ により定まる．この写像は全単射であることを示せ．

3) 1) で定めた写像 φ は
$$\forall f_1, f_2 \in V,\ \varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2),$$
$$\forall f \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$$
   を満たすことを示せ（これは φ が $\mathbb{R}$-線型写像であることを意味する）．

4) φ は $\mathbb{R}$-線型同型写像であることを示せ．
   ※ 3) は現時点では解けなくても構わない．「線型代数学」で線型同型写像について扱うあたりで分かればよい．

問 3.10 (コーシーの平均値の定理). $a < b$ とする．$f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続であって，(a, b) 上微分可能であるとする．また，Dg は (a, b) 上 0 にならないとする．この時 $g(a) \neq g(b)$ であって，また，$c \in (a, b)$ が存在して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{Df(c)}{Dg(c)} \tag{3.11}$$

が成り立つ．ここではこれを示すことを目標とする．

以下では $a < b$ とし，$f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続であって，(a, b) 上微分可能であるとする．また，Dg は (a, b) 上 0 にならないとする．

1) $g(a) \neq g(b)$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：平均値の定理（Rolle の定理）を用いるのが簡単である．

2) $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

により定める．$F(a) = F(b) = 0$ が成り立つことを確かめよ．また，F は $[a,b]$ 上連続であり，(a,b) 上可微分であることを示せ.

3) $\exists c \in (a,b),\ DF(c) = 0$ が成り立つことを示せ．また，このことを用いて (3.11) が成り立つことを示せ.

コーシーの平均値の定理は次のように解釈できる．$F\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ を $F(t) = (f(t), g(t))$ により定める．$g(a) \neq g(b)$ であることを認めると，$F(b)$ と $F(a)$ を通る直線の方向ベクトルは $(f(b)-f(a), g(b)-g(a))$ で与えられる．一方，F は点の移動を表すと考えると，$t = c$ における速度ベクトルは $(Df(t_0), Dg(t_0))$ で与えられる．従って (3.11) はこの速度ベクトルが $F(a)$ と $F(b)$ を通る直線の方向ベクトルとなっていることを主張している.

問 3.12 ***.** 問 3.10 の記号をそのまま用いる.

1) g は $[a,b]$ 上狭義単調増加であるか，あるいは狭義単調減少であるかのいずれかであることを示せ.

※ 以下では g は $[a,b]$ 上狭義単調減少とする．また，話を簡単にするために $(f(a), g(a)) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ とする．$g(a) \neq g(b)$ が成り立つので $g(b) \neq 0$ である．$\mathbb{R}^2$ の線型変換 $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\dfrac{f(b)}{g(b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

により定める.

2) $\varphi\begin{pmatrix} f(b) \\ g(b) \end{pmatrix}$ を求めよ.

3) $G = \varphi \circ F$ とする．即ち，

$$G(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\dfrac{f(b)}{g(b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

と置く．この時

$$G(t) = \begin{pmatrix} -g(t) \\ F(t) \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ（$f(a) = g(a) = 0$ としていることに注意せよ）.

4) $-g([a,b]) = [A,B]$ とする．$-g$ には逆写像 $h\colon [A,B] \to [a,b]$ が存在し，$[A,B]$ 上連続で，(A,B) 上微分可能であることを示すことができる．すると $G \circ h(s) = \begin{pmatrix} s \\ F \circ h(s) \end{pmatrix}$ が成

り立つ．$G\circ h$ は $F\circ h$ のグラフであることを確かめよ．また，(f,g) の描く図形（$[a,b]$ の像）と $G\circ h$ の描く像を比較せよ．

問 3.13. $r\geq 0$ あるいは形式的に $r=\infty$ とし，$C^r(\mathbb{R})=\{\mathbb{R}$ 上の C^r 級函数全体$\}$ と置く．

1) $C^r(\mathbb{R})$ は函数の和と定数倍（演習問題 2 の定義 2.25）により $\mathbb{R}$-線型空間（実線型空間）であることを示せ．必要であれば定義を調べること．
2) $r\geq 1$ あるいは形式的に $r=\infty$ とする．$f\in C^r(\mathbb{R})$ の導函数 Df は $C^{r-1}(\mathbb{R})$ に属することを示せ．ただし，$r=\infty$ の時には $r-1=\infty$ と定める．
   ※ 従って $D\colon C^r(\mathbb{R})\to C^{r-1}(\mathbb{R})$ である．
3) D は $\mathbb{R}$-線型写像（実線型写像）であることを示せ．必要であれば定義を調べること．
4*) ここでは話しを簡単にするため $r=\infty$ とする．$\varphi\colon C^\infty(\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R})$ とする（φ の具体的な形はここでは問わないが，例えば $a\in\mathbb{R}$ とし，$\varphi(f)=af$ などを念頭に置いておけばよい）．$f\in C^\infty(\mathbb{R})$ に関する方程式
$$Df=\varphi(f)$$
を考えると，これは微分方程式（の一種）である．この方程式の解空間は $\{f\in C^\infty\mid Df=\varphi(f)\}$ であるが，これは
$$(D-\varphi)^{-1}(\{0\})$$
に等しいことを確かめよ（なお，$(D-\varphi)^{-1}(\{0\})$ を $(D-\varphi)^{-1}(0)$ と表すことも多い）．ここで 0 は任意の $x\in\mathbb{R}$ について 0 を与える函数（このような函数もしばしば（定数函数）0 と呼ばれる）を表し，また，$(D-\varphi)(f)=Df-\varphi(f)$ である．

問 3.14*. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を
$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$
により定める．f は C^∞ 級である（問 3.2）．

1) $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $g(x)=f(x)f(1-x)$ により定める．$x\leq 0$ あるいは $x\geq 1$ が成り立つならば $g(x)=0$ が成り立つことを示せ．
2) g は C^∞ 級であることを示せ．また，g のグラフの概形を描け．
3) $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $h(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)dt$ により定める（積分は高校までの要領で考えれば良い．つまり，$G\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を g の原始函数とし，$h(x)=G(x)-G(0)$ により定める，とすれば良い．G の具体的な形はここでは意味がない）．微分積分学の基本定理によれば $Dh(x)=g(x)$ が成り立つ．このことを踏まえて h は C^∞ 級であることを示せ．

4) h は（$\mathbb{R}$ 上）単調増加かつ $(0,1)$ において狭義単調増加であることを示せ．また $x \leq 0$ ならば $h(x)=0$，$x \geq 1$ ならば $h(x)=h(1)$ が成り立つことを示せ．最後に，h のグラフの概形を描け．

5) $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $H(x)=\dfrac{h(x)}{h(1)}$ により定める．$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi(x)=\begin{cases} H(3x), & x \leq \dfrac{1}{3}, \\ 1, & \dfrac{1}{3} < x \leq \dfrac{2}{3}, \\ H(-3x+3), & \dfrac{2}{3} < x \end{cases}$$

により定める．φ は C^∞ 級であることを示せ．また，φ のグラフの概形を描け．

6) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^r 級の函数とする．ただし，$r \geq 0$ あるいは $r=\infty$ とする．$\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\beta(x)=\varphi(x)\alpha(x)$ により定めると $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$ 上 $\alpha=\beta$ が成り立つことを示せ．また，$x \geq 0$ あるいは $x \geq 1$ ならば $\beta(x)=0$ が成り立つことを示せ．

注 3.15. 1) 最後の 6) は例えば次のような意味を持つ．α は大域的（気にしている空間（観測対象），ここでは $\mathbb{R}$ 全体）で定まっている．しかし，端の方では観測に誤差が多すぎて，結果が使い物にならないとする．これらを無視するフィルターとして φ を掛けるという操作が使える．つまり，$x \leq 0$ あるいは $x \geq 1$ ならば $\beta(x)=0$ であって，かつ $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$ 上 $\beta=\alpha$ なので，真ん中の良い部分だけを β は取り出している．なお，$\left[0,\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3},1\right]$ は微妙な部分であるが，放っておくことにする．問 3.14 で定めた函数たちをうまく用いると，局所的（観測可能な範囲）で望ましい，あるいは既に知っている性質を持つような函数などを比較的自由に作ることもできる．このようなことは専門課程に進むと，例えば数学や物理ではあからさまに，情報や経済でもこっそり現れ始める．

2) 6) において α が C^ω 級であるとする．このとき，β は $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$ 上では C^ω 級であるが，$\mathbb{R}$ 全体では C^∞ 級である．

（以上）