２０１５年度数学 II（足助担当）　演習問題 5　2015/10/14（水）

全般に $K$ で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

**問 5.1.** 以下の行列のランク (rank) を求めよ.

$$1)\ \begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\1&3&2\end{bmatrix}\qquad 2)\ \begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\\2&3\\4&5\end{bmatrix}\qquad 3)\ \begin{bmatrix}1&1&1&-3\\1&1&-3&1\\1&-3&1&1\\-3&1&1&1\end{bmatrix}$$

**問 5.2.** 以下の行列の行列式を計算せよ.

$$1)\ \begin{bmatrix}-1&1\\-4&2\end{bmatrix}\quad 2)\ \begin{bmatrix}5&3\\-4&9\end{bmatrix}\quad 3)\ \begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\quad 4)\ \begin{bmatrix}1&2&3\\2&0&2\\3&2&1\end{bmatrix}$$

$$5)\ \begin{bmatrix}-3&1&0\\0&2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}\quad 6)\ \begin{bmatrix}1&3&1&0\\3&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad 7)\ \begin{bmatrix}1&1&1&-3\\1&1&-3&1\\1&-3&1&1\\-3&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$8)\ \begin{bmatrix}2&0\\-4&3\end{bmatrix}\quad 9)\ \begin{bmatrix}2&-1&3\\2&3&2\\-1&1&-1\end{bmatrix}\quad 10)\ \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}\quad 11)\ \begin{bmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&2\\1&0&1&1\\1&2&3&4\end{bmatrix}$$

$$12)\ \begin{bmatrix}E_r&O_{r,n-r}\\O_{n-r,r}&O_{n-r,n-r}\end{bmatrix}\quad 13)\ \begin{bmatrix}O_{n-1,1}&E_{n-1}\\1&O_{1,n-1}\end{bmatrix}$$

**問 5.3.** 以下の行列のランクを求めよ．また，逆行列が存在するかどうか判定し，存在する場合には逆行列を求めよ.

ヒント：計算を工夫することで，作業量をある程度減らすことができる.

$$1)\ \begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}\quad 2)\ \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\quad 3)\ \begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\quad 4)\ \begin{bmatrix}1&3&-4\\2&0&-3\\0&-1&5\end{bmatrix}$$

$$5)\ \begin{bmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{bmatrix}\quad 6)\ \begin{bmatrix}-3&2&0&0\\4&-2&0&0\\0&0&3&-4\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad 7)\ \begin{bmatrix}1&2&-1&1\\3&1&2&-1\\1&-2&3&1\\2&1&3&-1\end{bmatrix}$$

$$8)\ \begin{bmatrix}1&2&-1\\3&1&2\\1&-3&4\end{bmatrix}\quad 9)\ \begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\quad 10)\ \begin{bmatrix}1&1&0\\1&0.1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

**問 5.4.** $A \in M_{m,n}(K)$ とする．$\operatorname{rank} A = 0$ であることと，$A = O_{m,n}$ であることは同値であることを示せ．

**問 5.5.** 1) $A \in M_{m,n}(K),\ a \in K^m$ とする．$\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank}[A\ a] \leq \operatorname{rank} A + 1$ が成り立つことを示せ．また，$a = o$ ならば $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A\ a] = \operatorname{rank}[A\ o]$ が成り立つことを示せ．

2) $A \in M_{m,n}(K),\ b \in M_{1,n}(K)$ とする．$\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} \leq \operatorname{rank} A + 1$ が成り立つことを示せ．また，$b = [0\ \cdots\ 0]$ ならば $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix}$ が成り立つことを示せ．

3) $A \in M_{m,n}(K)$ とする．$A$ に $o$ に等しい列が $k$ 個存在すれば，$\operatorname{rank} A \leq n - r$ が成り立つことを示せ．また，$A$ に $[0\ \cdots\ 0]$ に等しい行が $k$ 個存在すれば，$\operatorname{rank} A \leq m - r$ が成り立つことを示せ．

4) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．$A = [a_1\ \cdots\ a_n]$ とし，$1 \leq r \leq n,\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$ とすると $\operatorname{rank}[a_{j_1}\ \cdots\ a_{j_r}] = r$ が成り立つことを示せ．また，$A = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ と行ベクトルを用いて表し，$1 \leq r \leq n,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ とすると $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} b_{i_1} \\ \vdots \\ b_{i_r} \end{bmatrix} = r$ が成り立つことを示せ．

**問 5.6.** $A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,l}(K)$ とする．$\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$ が成り立つことを示せ．
ヒント：$P \in \mathrm{GL}_m(K)$ を $PA$ が階段行列となるように選ぶ．$P$ は正則だから $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} PAB$ が成り立つ．この時，$PAB$ の形をよく観察することにより $\operatorname{rank} PAB \leq \operatorname{rank} A$ が成り立つことが示せる．同様に $B$ を既約列階段行列に変形することで $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ が成り立つことも示せる．

**問 5.7.** $A \in M_{m,n}(K)$ について，$\operatorname{rank} A < n$ とする．このとき，$v \in K^n,\ v \neq o$ が存在して $Av = o \in K^m$ が成り立つことを示せ．同様に，$\operatorname{rank} A < m$ ならば $w \in M_{1,m}(K),\ w \neq [0\ \cdots\ 0]$ が存在して $wA = [0\ \cdots\ 0] \in M_{1,n}(K)$ が成り立つことを示せ．特に，$A \in M_n(K)$ について $\operatorname{rank} A < n$ ならば（この条件は $A \notin \mathrm{GL}_n(K)$ と同値である），$v, w \in K^n$ が存在して $Av = o$ と ${}^t wA = o$ が成り立つ．

（以上）