２０１５年度微分積分学（理Ｉ 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 １４　2015/11/9（月）

問 14.1 (問 3.3（の一部）). 次に挙げる函数の，与えられた点を中心とするテーラー級数（剰余項のないテーラー展開[†1]）を求めよ．また，級数の収束半径を求めよ．

1) $f(x) = \sin x^2$ とし，中心は 0 とする．
2) $f(x) = \sin x$ とし，中心は $\dfrac{\pi}{2}$ とする．
3) $f(x) = x - x^2$ とし，中心は 1 とする．
4) $f(x) = \log(1 + x^2 + x^3)$ とし，中心は 0 とする．
5) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ とし，中心は 0 とする．
6) $f(x) = \tan^{-1} x$ とする．ただし，$f(0) = 0$ であるとする．また，中心は 0 とする．

問 14.2. 以下の冪級数の収束半径を求めよ．なお，中心は全て 0 とし，$x^0 = 1$ と定める．また，得られる函数を根号や sin や cos などの，よく知られている函数を用いて表せ．

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$.
2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n}}{(2n)!}$.
3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{a_n}{n!}x^n$，ただし $a_n = \begin{cases} 1, & n=0, \\ \dfrac{1}{2}, & n=1, \\ (-1)^{n+1}\dfrac{(2n-3)!}{2^{2n-2}(n-2)!} = (-1)^{n+1}\dfrac{(2n-3)!!}{2^n}, & n \geq 2 \end{cases}$.

問 14.3. $I = (-1, 1)$ とし，I 上の函数 f を $t \in I$ について

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

と置くことにより定める．

1) f の $t = 0$ を中心とするテーラー級数（剰余項のないテーラー展開）を求めよ．また，求めた級数（冪級数）の収束半径を求めよ．
2) I 上の函数 g を $x \in I$ について

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}} \end{aligned}$$

により定める．g の $x = 0$ を中心とするテーラー級数を求めよ．また，求めた級数（冪級数）の収束半径を求めよ．

※ 右辺の積分はいわゆる楕円積分で，明示的に求めることはできないことが知られている．従って積分を実行してからテーラー級数を求めることはできない．また，この積分は例えば振り子（単振り子）の周期を求める際に現れる．

[†1] 前期にも述べたが，このような級数もテーラー展開と呼んでしまうのが通例である．ここでは念のためにいちいち述べる．

3) $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を小数点以下 3 桁まで求めよ．
※ 具体的に計算してみていないのでやると大変かも知れない．

定義 14.4. V を実線型空間とする．$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ が V 上の**ノルム**であるとは，次が成り立つことを言う．

1) $\forall v \in V,\ \|v\| \geq 0$ が成り立ち，かつ，等号が成り立つのは $v = o$ の時に限る（o は V の零ベクトルである）．
2) $\forall v, v' \in V,\ \|v + v'\| \leq \|v\| + \|v'\|$（三角不等式）が成り立つ．
3) $\forall v \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$ が成り立つ．

ノルムはベクトルの長さの一般化である．

問 14.5. 1) $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ について，$\|v\|_k = \sqrt[k]{|v_1|^k + \cdots + |v_n|^k} = (|v_1|^k + \cdots + |v_n|^k)^{\frac{1}{k}}$ と定める．$\|\cdot\|_k$ は $\mathbb{R}^n$ 上のノルムであることを示せ．$\|\cdot\|_k$ を ***k*-ノルム**と呼ぶ．2-ノルムは $\mathbb{R}^n$ の標準的なノルム（標準的な内積から定まるノルム）である．

2) $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}$ と定まる．$\|\cdot\|_\infty$ は $\mathbb{R}^n$ 上のノルムであることを示せ．$\|\cdot\|_\infty$ を **sup-ノルム**と呼ぶ．

3) $\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|v\|_2$ が成り立つことを示せ．

4) $\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^n$ 上のノルムとする．$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f(v) = \|v\|$ により定めると，f は連続であることを示せ．
ヒントを問 14.7 の後に記すが，ほとんど答えなので最初は見ないことを勧める．

5) $\|\cdot\|$，$\|\cdot\|'$ を $\mathbb{R}^n$ 上のノルムとする．$M > 0$ が存在して，

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \frac{1}{M}\,\|v\| \leq \|v\|' \leq M\,\|v\|$$

が成り立つことを示せ．また，$\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|'$ を入れ替えても同様の式が成り立つことを示せ．このような関係にある二つのノルムを**同値**なノルムと呼ぶ．従って，$\mathbb{R}^n$ 上の任意のノルムは同値である．
ヒントを問 14.7 の後に記すが，やはりほとんど答えなので最初は見ないことを勧める．

次の意味で 2-ノルムは特別である．

問 14.6. $\|\cdot\|_k$ を $\mathbb{R}^n$ 上の k-ノルムあるいは形式的に $k = \infty$ として sup-ノルムとする．$\mathbb{R}^n$ 上のある内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ が存在して $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\|_k = \sqrt{\langle v \mid v \rangle}$ が成り立つならば $k = 2$ が成り立つことを示せ．
ヒント：例えば中線定理を用いよ．

問 14.7. $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ と置く．また，$U = \{f \in V \mid \exists M > 0,\ |x| \geq M \Rightarrow f(x) = 0\}$ と置く．

1) 函数同士の和，定数倍により V は（実）線型空間であることを示せ．
2) U は V の部分線型空間であることを示せ．
3) $f, g \in U$ について $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$ と置く．
   a) 右辺は広義積分に見えるが，実際には普通の積分であることを示せ．
   b) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は U の内積（計量）を定めることを示せ．
4) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ により定まる U 上のノルムを $\|\cdot\|$ で表す．即ち，$f \in U$ について $\|f\| = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$ と置く．また，$f \in U$ について $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ と置く．
   a) $\|f\|_\infty$ は有限の値であることを示せ．また，$\|\cdot\|_\infty$ は U 上のノルムであることを示せ．
   b) U の点列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ であって，$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|f_n\| = 0$ かつ $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty$ であるようなものを一つ挙げよ[†2]．
   c) U の点列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ であって，$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|f_n\| = +\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ であるようなものを一つ挙げよ．

   4) の b) と c) は，$\mathbb{R}^n$ の場合とは異なり，U 上には同値でないノルムが存在することを示している（問 14.5 も参照のこと）．

問 14.8. $V = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^1 \text{ 級}\}$ とする．$f, g \in V$ について $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^1 (f(x)g(x) + Df(x)Dg(x))dx$ と置く[†3]．

1) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は V の内積（計量）であることを示せ．
2) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ から定まる V のノルムを $\|\cdot\|$ で表す．V の点列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ について，「$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|f_n\| = 0$ が成り立つ」という主張は，具体的には $\{f_n\}$ について何が成り立つことを主張しているのか簡潔に述べよ．
3) $W = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ とする．また，$f \in W$ について $\|f\|_W = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2\,dx}$ と定める．そして $\varphi\colon V \to W$ を $\varphi(f) = Df$ により定める．
   a) φ は線型写像であることを示せ．
   b) V の点列 $\{f_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|f_n\| = 0$ をみたすならば $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|Df_n\|_W = 0$ が成り立つことを示せ（定義が仰々しいだけで問題としては簡単である）．
   c) $f \in V$ について $\|f\|' = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2\,dx}$ と定める（$\|f\|_W$ と式は同じ）．V の点列 $\{f_n\}$ で，$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|' = 0$ をみたすが $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|Df_n\|_W = +\infty$ をみたす例を一つ挙げよ．

[†2] 「『何か』が 0 に収束するとき『(別の）何か』がある値に収束する」という主張は連続の定義とよく似ていることに注意．c) についても同様である．

[†3] $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ は Sobolev（Соболев ；ソボレフ）空間と関連が深い．

問 14.5 のヒント.

4) については以下に従ってみよ.

1) $K = \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\}$ と置く. $K > 0$ であって, $\|v\| \leq K\|v\|_1$ が成り立つことを示せ.
2) $v, u \in \mathbb{R}^n$ とする. $\|v+u\| \leq \|v\| + \sqrt{n}K\|u\|_2$ と $\|v\| \leq \|v+u\| + \sqrt{n}K\|u\|_2$ が成り立つことを示せ.
3) 元々の主張を示せ.

5) については以下に従ってみよ.

1) $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_2 = 1\}$ と置く. f は S^{n-1} 上で最大値と最小値を取ることを示せ. また, これらをそれぞれ L, l とすると $0 < l \leq L$ が成り立つことを示せ.
2) $v \in \mathbb{R}^n$ について $l\|v\|_2 \leq \|v\| \leq L\|v\|_2$ が成り立つことを示せ.
3) 元々の主張を示せ.

収束列とコーシー列．

ここでは収束列とコーシー列の関係についてまとめておく．直感的には「当たり前」なことをひたすら確かめていくが，実際には全く当たり前でないこと[†4]ことなので一通り解いておくことを強く勧める[†5]．数理科学基礎演習問題 3.4 も参照のこと．また，以下では全ての条件が式で記述される．式で全て把握できるのであればそれで構わないが，そうでなければ（例えば私はそうではない）簡単な場合について図を描くと良い．ただし，図は必ず「嘘」を含むことを忘れてはいけない．

定義 14.9. 複素数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が**コーシー（Cauchy）列**であるとは，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon)$$

が成り立つことを言う（条件「$m, n \geq N$」は「$m, n > N$」としても同値である．確かめよ）．

問 14.10. 複素数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するならばコーシー列であることを示せ．

以下ではしばらく逆の主張，即ち以下を示すことを目標とする．

定理 A. 複素数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列ならば収束する．

問 14.11.
1) 複素数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が収束することと，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の実部と虚部がそれぞれ収束することは同値であることを示せ．
2) 複素数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であることと，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の実部と虚部がそれぞれコーシー列であることは同値であることを示せ．

問 14.12. 定理 A を示すためには $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が実数列の場合を考えれば十分であることを示せ．即ち，実数列に関して定理 A が成り立てば,（複素数列に関しても）定理 A が成り立つことを示せ．

また，次が成り立つことにも注意しておく．

問 14.13. 複素数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $n \to +\infty$ の時 $a, a' \in \mathbb{C}$ に収束するとする．この時 $a = a'$ が成り立つことを示せ．

ここで次を認める．

定理 B. 上に有界な，単調増加な実数列はある実数に収束する．

定理 B は「実数の連続性」と呼ばれる，実数に関する基本的な性質に関わる．同値な言い換えがいくつかあるし,「公理」としてしまうこともある．詳しくは解析入門 I，杉浦光夫，東大出版会，などを参照のこと．

[†4] 例えば問 14.19 を参照のこと．慣れるとこのようなことが起きることは「当たり前」にしか思えなくなるが，まだ異様に見えると思う．

[†5] 数列の収束のごく基本的な事柄なので，数学を用いる学科に進むのであれば避けない方が良い．

問 14.14. 下に有界な，単調減少な実数列はある実数に収束することを示せ．

問 14.15. ここでは次を示す．

> **定理 C.** $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を（上下に）有界な実数列とする．このとき，次のいずれかが成り立つ．
> 1) ある $c\in\mathbb{R}$ が存在して，無限個の $n\in\mathbb{N}$ について $c_n=c$ が成り立つ．
> 2) ある自然数列 $n_0<n_1<\cdots$ が存在して，$d_m=c_{n_m}$ と置くと $m\neq m'$ ならば $d_m\neq d_{m'}$ が成り立つ．更に，ある $c\in\mathbb{R}$ が存在して $\lim_{m\to+\infty} d_m=c$ が成り立つ．$(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$ のようにして得られる数列を $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の**部分列**と呼ぶ．
>
> 標語的に言えば，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が有界ならば，ある $c\in\mathbb{R}$ に収束する部分列を持つ（1) の場合には c に等しい c_n を並べれば良い）．

まず次を示す．

> **補題 D.** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$，$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とし，条件
> $$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\leq a_{n+1},\ b_{n+1}\leq b_n,$$
> $$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\leq c_n\leq b_n,$$
> $$\lim_{n\to+\infty}|b_n-a_n|=0$$
> が成り立つとする．このとき，$c\in\mathbb{R}$ が存在して $\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} b_n=\lim_{n\to+\infty} c_n=c$ が成り立つ．

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は上に，$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は下に有界であることを示せ．
2) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ と $\lim_{n\to+\infty} b_n$ が存在することを示せ．これらを a,b とする．
3) $a=b$ が成り立つことを示せ．
4) $c=a(=b)$ と置く．$\lim_{n\to+\infty} x_n=c$ が成り立つことを示せ．

次に定理 C を示す．$C=\{c_n\mid n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}$ と置く．

1) C が有限集合であるならば場合 1) が成り立つことを示せ．
   ヒント：添字は有限個ではない．
- 以下 C は無限集合とする（有限集合（有限個の元からなる集合）ではないとする）．

2) 仮定により，ある $a_0,b_0\in\mathbb{R}$ について $\forall n\in\mathbb{N},\ a_0\leq c_n\leq b_0$ が成り立つ．$a_0<b_0$ が成り立つことを示せ．
3) $n_0=0,\ d_0=c_0$ とし，$e_0=\dfrac{a_0+b_0}{2}$ と置く．
$$S_0^-=\{c_n\mid c_n\leq e\}=C\cap[a_0,e_0],$$
$$S_0^+=\{c_n\mid c_n\geq e\}=C\cap[e_0,b_0]$$
   と置けば，S_0^-，S_0^+ のいずれかは無限集合であることを示せ．
4) S_0^- は無限集合であるとする．このとき，$S_0^-\backslash\{c_0\}$ も（$c_0\in S_0^-$ であろうが無かろうが）無限集合である．そこで $S_0^-\setminus\{c_0\}$ の任意の元を選び，d_1 とする．すると適当な $n_1>1=n_0$ が存在して $d_1=c_{n_1}$ が成り立つ．$a_1=a_0,\ b_1=e_0$ と置けば，$a_0\leq a_1,\ b_1\leq b_0$ かつ

$a_1 \le d_1 \le b_1$ が成り立つ．また，$|b_1 - a_1| = \dfrac{|b_0 - a_0|}{2}$ が成り立つ．ここまでの主張を確かめよ．また，S_0^+ が無限集合の場合には $d_1 \in S_0^+ \setminus \{c_0\}$ が存在して，$a_1 = e_0,\ b_1 = b_0$ と置くと $a_0 \le a_1,\ b_1 \le b_0,\ a_1 \le d_1 \le b_1$ かつ $|b_1 - a_1| = \dfrac{|b_0 - a_0|}{2}$ が成り立つことを示せ.

5) $e_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ と置く．$S_1^- = C \cap [a_1, e_1],\ S_1^+ = C \cap [e_1, b_1]$ と置く．いずれかは無限集合である．ここでは S_1^+ が無限集合であるとする．この時，$S_1^+ \setminus \{c_0, \ldots, c_{n_1}\}$ も無限集合であることを示せ.

6) 帰納的に数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と，狭義単調増加な自然数列 $\{0 = n_0, n_1, \ldots\}$ が構成できて，$d_m = c_{n_m}$ と置くと $a_n \le a_{n+1},\ b_{n+1} \le b_n,\ a_n \le d_n \le b_n$ かつ $|b_n - a_n| = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$ が成り立つことを示せ.

7) $\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{m\to+\infty} c_{n_m}$ が存在することを示せ.

問 14.16. 実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であるとする.

1) $A = \{a_n\} \subset \mathbb{R}$ と置けば A は有界であることを示せ．このことを単に数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である，と言う.
2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を持つことを示せ.
3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある $a \in \mathbb{R}$ に収束することを示せ（この a は問 14.13 により一意的である）.

これで定理 A の証明は完了した.

問 14.17. 有界な実数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，収束する部分列 $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ と $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ であって $\lim_{m\to+\infty} b_m \ne \lim_{k\to+\infty} c_k$ が成り立つような物を持つ例を一つ挙げよ．また，このような $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $n \to +\infty$ で収束せず，コーシー列でもないことを示せ.

問 14.18. $(a_t)_{t\ge0}$ を非負の実数 t を添字とする実数列とする．$(a_t)_{t\ge0}$ がコーシー列であるとは

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists T \ge 0,\ (t, s \ge T \Rightarrow |a_t - a_s| < \epsilon)$$

が成り立つことを言う．$(a_t)_{t\ge0}$ が $t \to +\infty$ で収束することと，$(a_t)_{t\ge0}$ がコーシー列であることは同値であることを示せ.
ヒント：収束すればコーシー列であることは容易である．$(a_t)_{t\ge0}$ をコーシー列とする．この時 $(a_t)_{t\ge0}$ の部分列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ もコーシー列である.

問 14.19****.** 極素朴な主張「コーシー列は収束する」は必ずしも成り立たない.

1) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ と置き，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(0,1)$ の点列とみなす．すると $\lim_{n\to+\infty} a_n$ は $(0,1)$ の範囲では存在しないことを示せ.
ヒント：「0 に収束するが $0 \notin (0,1)$ だから $\cdots$ 」という議論もできなくはないが，正確（厳密）に議論を進めるのは意外に難しい．素直に $a \in (0,1)$ に収束するとして矛盾を導く方が容易である.

2) $X = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ と置く．$f \in X$ について $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ と置く．$\|\cdot\|$ は X 上の**ノルム**である[†6]．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X の点列，即ち $[0,1]$ 上の連続函数からなる列とする．

・$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\|\cdot\|_1$ に関してコーシー列であるとは，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_1 < \epsilon)$$

が成り立つことを言う．

・$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\|\cdot\|_1$ に関して $f \in X$ に収束するとは

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_1 < \epsilon)$$

が成り立つことを言う．

2)-i) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある $f \in X$ に収束するならば $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であることを示せ．

2)-ii) コーシー列であるような $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であって，どのような $f \in X$ にも収束しないような物の例を挙げよ．
ヒント：f として仮に連続でないような函数を考え（このような函数は X の元ではないことに注意），それを連続函数で（差の積分が小さくなるように）近似することを考えてみよ．

（以上）

[†6] ノルム（や内積）は例えば Fourier 解析などで重要である．ごく基本的なことについてはプリント前半を参照のこと．