２０１５年度微分積分学（理 I 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 5　　2015/7/13（月）
’15/7/23：問 5.4 の後の誤植を修正.

問 5.1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする．$\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ であれば $\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = r$ が成り立つことを示せ.

ヒント：例えば数理科学基礎の問 2.22 を用いることができる．なお，この極限を用いて冪級数の収束半径が求まることを d’Alembert（ダランベール）の定理などと呼ぶ．一方，$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が冪級数の収束半径の逆数となることを Cauchy–Hadamard（コーシー・アダマール）の定理などと呼ぶ.

問 5.2. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は C^r 級であるとし，$f(0) = Df(0) = \cdots = D^{k-1}f(0) = 0,\ D^kf(0) \neq 0$ が成り立つとする．ただし $1 \leq k \leq r$ とする．この時，連続函数 $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ であって，条件

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^k g(x),$$
$$g(0) \neq 0$$

を満たすものが一意的に存在することを示せ．また，g は $x \neq 0$ で C^r 級であることを示せ.

ヒント：原点以外では $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^k}$ とするしかない．また，g は連続としているから $g(0)$ の候補も一意的である．余裕があれば問 5.3 と同様に g がどのような s について C^s 級になり得るか考えてみよ.

問 5.3. $f, g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を C^r 級とする．また，$g(0) = 0$ であって，一方，$x \neq 0$ ならば $g(x) \neq 0$ が成り立つとする.

1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f}{g}(x)$ が存在するならば $f(x) = 0$ が成り立つことを示せ．また，逆は成り立たないことを示せ.
2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f}{g}(x)$ が存在するとし，$h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f}{g}(x), & x \neq 0, \\ \lim_{x\to 0}\dfrac{f}{g}(x), & x = 0 \end{cases}$$

により定める.

a) h は C^k 級，$0 \leq k < r$ であるが C^{k+1} 級ではないような f, g の組を一つずつ挙げよ.

b) h が C^k 級，$r \leq k$ であるような f, g の組で，f も g も C^{r+1} 級ではないような例を一つ挙げよ（更に h は C^{k+1} 級ではないように f, g を選ぶこともできる）.

c) h が連続でない例を挙げよ.

ヒント：比較的単純な例があるが，パズル的な面があるので一人で考え込まない方が良いかもしれない.（かなり）余裕があれば，問 5.2 と共に，f, g を解析的とした場合にはどうなるか考えてみよ.

問 5.4. 次のように $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を定めるとき，f の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ におけるヘシアンを求めよ．

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$
2) $f(x,y) = x^2 - y^2$
3) $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$，ただし $a,b,c \in \mathbb{R}$

さて，C^2 級の n 変数函数の極大・極小に関して調べるのにはヘシアンが有効であった．ここでは特に $n=2$ とする．この時にはヘシアンは $M_2(\mathbb{R})$ 値函数である．これの固有値を調べても良いが，ここでは次のように考えてみる（この考え方は 3 変数以上の場合にも一般化できる）．

U を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする．また，$f\colon U \to \mathbb{R}$ を C^2 級とし，$a \in U$ について $Df(a) = 0$ が成り立つとする（a を f の臨界点とする）．f の a におけるヘシアンを $Hf(a)$ とし，$Hf(a)$ により定まる二次形式[†1)]を q で表すことにする．即ち，$v \in \mathbb{R}^2$ について

$$q(v) = {}^t v Hf(a) v$$

と定める．

$Hf(a) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$，$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ と成分で表せば

$$\begin{aligned} q(v) &= h_{11}{v_1}^2 + h_{12}v_1v_2 + h_{21}v_2v_1 + h_{22}{v_2}^2 \\ &= h_{11}{v_1}^2 + 2h_{12}v_1v_2 + h_{22}{v_2}^2 \end{aligned}$$

が成り立つ（ここで f が C^2 級であることを用いている）．問題になるのは，q が例えば正値であるかといったことである．

まず仮に $h_{11} > 0$ とし，$q'(v) = {v_1}^2 + 2\dfrac{h_{12}}{h_{11}}v_1v_2 + \dfrac{h_{22}}{h_{11}}{v_2}^2$ とする．このとき，

$$q'(v) = \left(v_1 + \frac{h_{12}}{h_{11}}v_2\right)^2 + \frac{h_{11}h_{22} - {h_{12}}^2}{h_{11}}{v_2}^2$$

が成り立つ（平方完成[†2)]した）．$h_{11}h_{22} - {h_{12}}^2 = \det Hf(a)$ が成り立つことに注意しておく．

1) $\det Hf(a) > 0$ ならば q' は正値である．また，新しい変数 w_1, w_2 を

$$w_1 = v_1 + \frac{h_{12}}{h_{11}}v_2, \quad w_2 = \sqrt{\frac{\det Hf(a)}{h_{11}}}\,v_2$$

により定めれば $v = {}^t(v_1, v_2)$ に $w = {}^t(w_1, w_2)$ を対応させる写像は全単射，より詳しく，線型同型写像であって，

$$q'(v) = {w_1}^2 + {w_2}^2$$

が成り立つ．

[†1)]'15/7/22 修正

[†2)]英語は completing the square である．

2) $\det Hf(a) < 0$ ならば q' は正値でも負値でもない．新しい変数 w_1, w_2 を

$$w_1 = v_1 + \frac{h_{12}}{h_{11}} v_2, \quad w_2 = \sqrt{-\frac{\det Hf(a)}{h_{11}}}\, v_2$$

により定めれば，$v = {}^t(v_1, v_2)$ に $w = {}^t(w_1, w_2)$ を対応させる写像は線型同型写像であって，

$$q'(v) = {w_1}^2 - {w_2}^2$$

が成り立ち，q' は不定符号である．実際には更に q' は不定値である．

3) $\det Hf(a) = 0$ ならば，新しい変数 w_1, w_2 を

$$w_1 = v_1 + \frac{h_{12}}{h_{11}} v_2, \quad w_2 = v_2$$

により定めれば，$v = {}^t(v_1, v_2)$ に $w = {}^t(w_1, w_2)$ を対応させる写像は線型同型写像であって，

$$q'(v) = {w_1}^2$$

が成り立つ．q' は半正値であるが，正値ではない．実際，q' は退化している．

問 5.5. q を $\mathbb{R}^n$ 上の半正値二次形式とする．q が正値ではないことと，q が退化していることは同値であることを示せ．

$q = h_{11} q'$，$h_{11} > 0$ であるから，まとめると次が成り立つ．

i) $\det Hf(a) > 0$ ならば q は正値である．従って a は f の極小点である．

ii) $\det Hf(a) < 0$ ならば a は f の鞍点である．実際，$l_1(t) = a + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$，$l_2(t) = a + \begin{pmatrix} -h_{12} \\ h_{11} \end{pmatrix} t$ とし，$f_1 = f \circ l_1$，$f_2 = f \circ l_2$ とすれば $t = 0$ は f_1 の極小点，f_2 の極大点である．

問 5.6. 後半の主張を次の手順で示せ．

1) $v(t) = \dfrac{dl_1}{dt}(t)$ とすると

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2}(t) = {}^t v(t)\, Hf(l_1(t))\, v(t)$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：例えば $l_1 = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ w_1(t) \end{pmatrix}$ と成分を用いて表すと考えやすい．

2) $t = 0$ は f_1 の極小点であることを示せ．

3) $t = 0$ は f_2 の極大点であることを示せ．

$h_{11} < 0$ の場合もほぼ同様である．$q' = \dfrac{1}{h_{11}} q$ とすると次が成り立つ．

i') $\det Hf(a) > 0$ ならば q は負値である．従って a は f の極大点である．

ii') $\det Hf(a) < 0$ ならば a は f の鞍点である．

問 5.7. 上の主張を確かめよ．

$h_{11}=0$ とする．この時には $q(v)=2h_{12}v_1v_2+h_{22}{v_2}^2$ が成り立つ．$h_{22}\neq 0$ であれば，$h_{11}\neq 0$ の場合と同様に平方完成すれば，同様の結論が得られる．そこで $h_{22}=0$ とする．$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ とすると，$v={}^t(v_1,v_2)$ に $w={}^t(w_1,w_2)$ を対応させる写像は線型同型写像であって

$$q(v)=\frac{h_{12}}{2}({w_1}^2-{w_2}^2)$$

が成り立つ．$h_{12}\neq 0$ であれば $h_{11}\neq 0$ の場合と同様に，a は f の鞍点であることが示される．$h_{12}=0$ とする．このときには $Hf(a)=O_2$, $q=0$ であり，ヘシアンを用いても（零行列なので）a が極大点（極小点）であるかどうかは調べられない．

問 5.8. $a\in\mathbb{R}$ とし，$f(x,y)=x^4+ay^4$ とする．

1) $Hf(0,0)=O_2$ が成り立つことを示せ．
2) $(0,0)$ は $a>0$ ならば f の極小点，$a<0$ ならば f の鞍点であることを示せ．$a=0$ ならば $(0,0)$ は f の極小点でも鞍点でもないが，局所的な最小点であることを示せ．

問 5.9*. $F\subset\mathbb{R}^n$ を閉集合とする．即ち，ある開集合 $O\subset\mathbb{R}^n$ が存在して $F=\mathbb{R}^n\setminus O$ が成り立つとする．さて，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を F の点列とし，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^n$ のある点 a に $n\to+\infty$ で収束するとする．このとき $a\in F$ が成り立つことを示せ．
ヒント：$a\notin F$ とする．すると $a\in O$ であるから，ある $\epsilon>0$ が存在して $B_a(\epsilon)\subset O$ が成り立つ．一方，$\lim_{n\to+\infty}a_n=a$ なので，$\epsilon>0$ とすれば，ある N が存在して $n>N$ ならば $d(a_n,a)<\epsilon$ が成り立つ．

問 5.10. $K\subset\mathbb{R}$ を有界閉集合とする．K には最大元と最小元が存在することを示せ．
ヒント：K は有界なので $\sup_{x\in K}x$ と $\inf_{x\in K}x$ が存在する．これらが K に属するか調べてみよ．あるいは K 上の連続函数をうまく定めても良い．

問 5.11. $A\subset\mathbb{R}^n$ とし，$f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を連続函数とする．

1) 閉集合 A と f の組で，次が成り立つようなものを一つずつ挙げよ．
   a) f は A において最大値も最小値も取らない．
   b) f は A において最大値を取るが最小値は取らない．
   c) f は A において最小値を取るが最大値は取らない．
2) 有界な A と f の組で 1) のそれぞれの性質を持つような組を一つずつ挙げよ．

（以上）