２０１５年度微分積分学（理I 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 4　　2015/7/6（月）

問 4.1. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ が成り立つことを示せ．

問 4.2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は 0 に置いてテーラー（級数）展開可能であるとし，収束半径を $r > 0$ とする．また，f の 0 におけるテーラー展開を $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ とする．

1) 級数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径を求めよ．

2) 級数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ の収束半径を求めよ．

※ 更に次を（講義で扱う内容の範疇で）示すことができる．

a) Df は 0 においてテーラー展開可能であって，その展開は $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ で与えられる．

b) $x \in (-r, r)$ について $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ が定まる．さらに F は 0 においてテーラー展開可能であって，その展開は $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ で与えられる．

注 4.3***.** 問 4.2 の事実は大変都合が良いが，f に「テーラー展開可能」という条件がつくことに注意が必要である．これは f が「（複素）正則函数である」こととほぼ同値な条件である．f が正則函数であることの正確な定義は述べないが，大雑把に言えば，$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が正則であるとは，f を z と $\bar{z}$ の函数とみなすと，実際には z のみの函数であることである．例えば $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ とすれば f は正則であるし，$g(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ とすれば g は正則でない．さて，$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x = a$（$a \in \mathbb{R}$）でテーラー展開可能であるとすると，$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$, $x \in (-r, r)$（r は右辺の収束半径）と表すことができる．このとき，x に $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$ を無理矢理「代入」して複素数値函数を定めることができて，得られた函数は正則であることが示される．また，逆に正則函数は（b として複素数を許せば）級数 $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-b)^n$, $|z| < s$，の形に表すことができることも示される．この意味で $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と f が（複素）正則函数であることはほぼ同値なことである．例えば $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ とする．f は $\mathbb{R}$ 上定義されているが，$x = 0$ におけるテーラー展開 $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ の収束半径は 1 である．実数の範囲のみで考えると不思議にも思えるが，テーラー展開可能なら複素数を（今の場合 $|z| < 1$ の範囲で）代入して良いことを踏まえて $f(\sqrt{-1}t)$, $0 \le t < 1$ を考えると，$f(\sqrt{-1}t) = \frac{1}{1-t^2}$ が成り立つはずである（実際これは成り

立つ）．もし元々のテーラー展開の収束半径が 1 より真に大きいならば $t \to 1$ としてもこの等式は複素数の範囲で（発散しないで）意味を持つはずであるが，実際には $\dfrac{1}{1-t^2}$ は発散する．

問 4.4 ***.** 問 4.2 は適切な解釈の下に正則函数についても成り立ち，特に微分方程式を扱う際に（実数の範囲，複素数の範囲にかかわらず）有用である．例えば方程式 $\dfrac{df}{dx}(x) = f(x)$ を考える．解は Ce^x, $C \in \mathbb{R}$ であるが，それは一旦忘れる．一般に線型常微分方程式系，あるいはベクトル値（$\mathbb{R}^n$-値）函数に関する常微分方程式 $\dfrac{dF}{dx}(x) = A(x)F(x) + b(x)$，ただし，$A\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ と $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ はテーラー展開可能であるとする[†1)]．この種の方程式については解が存在してテーラー展開可能であることを示すことができる[†2)]．この事実を $n = 1,\ A = 1,\ b = 0$ として当てはめれば，$\dfrac{df}{dx}(x) = f(x)$ の解は $x = 0$ でテーラー展開可能であることが分かる．そこで，収束半径 $r > 0$ は適切に設定することにして $x \in (-r, r)$ の範囲で $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ と表す．

（ここからが問題）

1) (a_n) の満たすべき漸化式を求めよ．
2) 条件 $f(0) = C$（$C \in \mathbb{R}$）の下で (a_n) を求めよ．
3) Ce^x のテーラー展開の係数と，2) で求めた (a_n) を比較せよ．

これよりやや非自明な例として方程式 $\dfrac{d^2f}{dx^2}(x) = -f(x)$ が挙げられる．これについても解がテーラー展開可能であることが上の一般論から分かる．f を解とし，$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ を $x = 0$ における f のテーラー展開とする．

4) (a_n) の満たすべき漸化式を求めよ．
5) 条件 $f(0) = 1, Df(0) = 0$ の下で (a_n) を求めよ．また，条件 $f(0) = 0, Df(0) = 1$ の下で (a_n) を求めよ．
6) 一般には $f(x) = a\cos x + b\sin x$ と表すことができる．このことを踏まえて (a_n) の一般の形を求めよ（$a\cos x + b\sin x$ のテーラー展開と (a_n) を比較せよ）．

なお，これらの微分方程式は形が単純なので (a_n) はある漸化式を満たすが，一般にはもう少し複雑な関係式が得られる．また，ここでは変数を実数としたが，実際には複素数と考えて良く（その代わりに函数も複素正則函数とする），同様な方法で微分方程式を解くことができる．実際にこのようなことを用いるのは先の話であるが，その種の話を根本的に支えているのは今扱っているような微積分の話である．

問 4.5 (数理科学基礎の演習問題 1.6 も参照のこと)**.**

[†1)] 中心や収束半径も大事であるが，ここではごまかす.「常微分方程式」あるいは本郷での講義で扱うかもしれないし，結局自習しないといけないかもしれない．

[†2)] †1 に同じ．

1) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を函数とする．f の $t\to+\infty$ における**上極限**を以下のように定め，$\limsup_{t\to+\infty} f(t)$ あるいは $\overline{\lim_{t\to+\infty}} f(t)$ で表す．

   a) 任意の $T\in\mathbb{R}$ について f が $(T,+\infty)$ 上で上に有界でなければ $\limsup_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$ と（形式的に）定める．

   b) ある $T\in\mathbb{R}$ が存在して f は $(T,+\infty)$ 上で上に有界とする．このとき，$t\in(T,+\infty)$ について $g(t)=\sup_{s\geq t} f(s)$ と置く．$(T,+\infty)$ 上 g は有限の値を取り（$t\in(T,+\infty)$ ならば $g(t)\in\mathbb{R}$ であって），また単調減少であることを示せ．

   c) $a=\lim_{t\to+\infty} g(t)$ が存在するか，あるいは $\lim_{t\to+\infty} g(t)=-\infty$ が成り立つことを示せ．前者の場合には $\limsup_{t\to+\infty} f(t)=a$ と定め，後者の場合には形式的に $\limsup_{t\to+\infty} f(t)=-\infty$ と定める．

   ※ f はある $M\in\mathbb{R}$ について $[M,+\infty)$ 上定まっていれば十分である．

2) f の $t\to-\infty$ における上極限も同様に定める．

3) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を函数とする．$a\in\mathbb{R}$ とし，f の $t\to a$ における**上極限**を以下のように定め，$\limsup_{t\to a} f(t)$ あるいは $\overline{\lim_{t\to a}} f(t)$ で表す．まず，$\epsilon>0$ について $J(\epsilon)=(a-\epsilon,a+\epsilon)\setminus\{a\}=(a-\epsilon,a)\cup(a,a+\epsilon)$ と置く．

   a) 任意の $\epsilon>0$ について f が $J(\epsilon)$ 上で上に有界でなければ $\limsup_{t\to a} f(t)=+\infty$ と定める．

   b) f は $J=J(\epsilon)$ 上有界とする．このとき，$\epsilon'\leq\epsilon$ について $g(\epsilon')=\sup_{t\in J(\epsilon')} f(t)$ と置く．$\lim_{\epsilon'\to a} g(\epsilon')=-\infty$ であるか，あるいは $\lim_{\epsilon'\to a} g(\epsilon')$ が存在することを示せ．この値（形式的に $-\infty$ も許す）を $\limsup_{t\to a} f(t)$ と定める．

注 4.6. 1) **下極限**についても「sup」を「inf」に置き換えて同様に定め，$\liminf$ あるいは $\underline{\lim}$ を用いて表す．ただし，途中で現れる函数 g は単調増加となる．

2) f の定義域を $\mathbb{N}$ とすれば，数列に関する上極限や下極限が得られる．

3) 例えば f が $[M,+\infty)$ 上で定まっていれば $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ について存在するか，存在すれば値は何か，考えることができた．同様に f が $[M,+\infty)$ 上で定まっていれば $\limsup_{t\to+\infty} f(t)$ や $\liminf_{t\to+\infty} f(t)$ について考えることができる．

問 4.7 (数理科学基礎の演習問題 1.8 も参照のこと)**.**

$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は有界とする．

1) $a\in\mathbb{R}$ について $\limsup_{t\to+\infty} f(t)\leq a$ が成り立つことと，$\forall\epsilon>0,\ \exists T>0,\ (t>T\Rightarrow f(t)<a+\epsilon)$ が成り立つことは同値であることを示せ．

2) $a \in \mathbb{R}$ について $\limsup_{t \to +\infty} f(t) \geq a$ が成り立つことと，$\forall \epsilon > 0,\ \forall T > 0,\ \exists t > T,\ f(t) > a - \epsilon$ が成り立つことは同値であることを示せ．

問 4.8. $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする．

1) $\limsup_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ が成り立つことと，狭義単調増加な数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して，$\lim_{n \to +\infty} f(t) = +\infty$ が成り立つことは同値であることを示せ．

2) $\limsup_{t \to a} |f(t)| = 0$ が成り立つことと，$\lim_{t \to a} f(t) = 0$ が成り立つことは同値であることを示せ．

3) $\liminf_{t \to +\infty} f(t) \leq \limsup_{t \to +\infty} f(t)$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立ち，有限の値であることと，$\lim_{t \to +\infty} f(t)$ が存在することは同値であることを示せ．さらに，この時には $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \limsup_{t \to +\infty} f(t) = \liminf_{t \to +\infty} f(t)$ が成り立つことを示せ．

4) $f(t) = o(g)\ (t \to +\infty)$ が成り立つことと $\lim_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 0$ が成り立つことは同値であることを示せ．

※ 1)〜4) に関しては $t \to a$（$a \in \mathbb{R}$）あるいは $t \to -\infty$ としても同様である．

5) $\limsup_{t \to +\infty} e^{-t}$ を求めよ．

6) $\limsup_{t \to +\infty} \sin x,\ \liminf_{t \to +\infty} \sin x$ をそれぞれ求めよ．また，$\lim_{t \to +\infty} \sin x$ が存在しないことを示せ．

7) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $1 f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ により定める．f は連続であった．さて，$f(x) = O(x)\ \ (x \to 0)$ であるが，$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ は存在しないことを示せ．また，$\limsup_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ と $\liminf_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ を求めよ．

問 4.9*. 以下が成り立つことを示せ．ただし，変数を x とするとき，$x \to$
$pm\infty$ あるいは $dx \to a,\ a \in \mathbb{R}$ とする．

1) $f = O(h_1), g = O(h_2)$ ならば $f + g = O(\max\{|h_1|, |h_2|\})$．また，$f + g = O(|h_1| + |h_2|)$．特に $f, g = O(h)$ ならば $f + g = O(h)$．

2) $f = o(h_1), g = o(h_2)$ ならば $f + g = o(|h_1| + |h_2|)$．特に $f, g = o(h)$ ならば $f + g = o(h)$．

3) $f = o(h)$ ならば $f = O(h)$．

4) $f = O(h_1), g = O(h_2)$ ならば $fg = O(h_1 h_2)$．$f = O(h_1), g = o(h_2)$ または $f = o(h_1), g = O(h_2)$ ならば $fg = o(h_1 h_2)$．

5) $f = O(g), g = O(h)$ ならば $f = O(h)$．$f = O(g), g = o(h)$ または $f = o(g), g = O(h)$ ならば $f = o(h)$．

（以上）