

# Ground state of the renormalized Nelson model: final version

廣島 文生 九大・数理

この研究は Oliver Matte (Aalborg 大学) との共同研究 [9] である. シュレディンガー作用素と結合した量子場の模型でスペクトルがよく研究されている典型的なものに Nelson 模型がある. 過去 2013 年の「確率論シンポ」, 2014 年と 2017 年の「確率解析とその周辺」で Nelson 模型のくりこみ理論について発表した. 今回大きく研究が進展しほぼ最終的な形を得ることができた. 簡単に物理的な説明をする. Nelson 模型は非相対論的なスピンのない核子とスカラー中間子の線形相互作用を表している. 相互作用は Yukawa 型相互作用と呼ばれる. スピンのある場合は [10, 8] を参照. Nelson 模型を自己共役作用素として定義するためにはまず紫外切断が必要で, そのとき

$$H = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + g\phi$$

と定義される. ここで,  $g \in \mathbb{R}$  は結合定数を表す. この紫外切断がくりこめることを Nelson 自身が約 50 年前に証明している [12]: “ $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F}$  上の自己共役作用素  $H_\infty$  で  $s \rightarrow \lim_{\epsilon \downarrow 0} e^{-T(H-E)} = e^{-TH_\infty}$  となるものが存在する. ここで  $E$  はくりこみ項”.

注意:

- (1) Path 測度を用いた別証明が [4] で与えられている.
  - (2) 多様体上の Nelson 模型のくりこみについては [2] を参照.
  - (3) Nelson は強位相での収束を示したが, 一様位相で収束を示すことができる [11].
  - (4)  $H_\infty$  の明示的な形はわかっていないが, Nelson 自身は  $H_\infty$  を二次形式で与えた.
  - (5) [4, 11] では  $e^{-tH_\infty}$  の Feynman-Kac 公式が与えられた.
  - (6)  $H_\infty$  の基底状態に関しては [6] で結合定数が十分小さいときに存在が示されている.
  - (7) 紫外切断があるとき基底状態の性質はギブス測度を用いて [1, 7, 5] で調べられている.
- $H_\infty$  の基底状態  $\varphi_g$  に関して次の結果を得た.  $V$  は Kato-分解可能クラスで binding 条件 [3] を満たすと仮定する.  $\kappa \geq 0$  を赤外切断パラメーター,  $N$  は個数作用素とする.

存在:  $\kappa > 0$  のとき  $H_\infty$  の基底状態  $\varphi_g$  が存在し, 一意的である.

局所性 1:  $\kappa > 0$  とする. このとき  $\|e^{\beta N} \varphi_g\| < \infty$  が任意の  $\beta > 0$  で成り立つ.

局所性 2:  $\kappa > 0$  とする. このとき

- (1)  $\|e^{\beta \phi(h)^2} \varphi_g\| < \infty$  が任意の  $\beta < 1/\|h/\sqrt{|k|}\|^2$  で成り立つ.
- (2)  $\lim_{\beta \uparrow 1/\|h/\sqrt{|k|}\|^2} \|e^{\beta \phi(h)^2} \varphi_g\| = \infty$

非存在:  $\kappa = 0$  のとき基底状態は存在しない.

非 Fock 表現:  $H_\infty^G$  を  $H_\infty$  の Gross 変換とする.  $H_\infty^G$  は  $\kappa > 0$  で  $H_\infty$  とユニタリー同値. さらに, 任意の  $\kappa \geq 0$  で基底状態が存在する.

基底状態の存在証明のアイデアを簡単に述べる. 仮想的な質量  $\nu > 0$  を導入し, さらに [11] の Feynman-Kac 公式を使って有界な開集合  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$  上に stopping time を使って  $H$  を定義し直す. それを  $H(\mathcal{G}, \nu)$  とおく.  $e^{-tH(\mathcal{G}, \nu)}$  の hypercontractivity を示して  $H(\mathcal{G}, \nu)$  が基底状態をもつことを示す. それを  $\varphi_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}, \nu)$  とする. massless 極限  $\nu_n \rightarrow 0$ , 無限体積極限  $\mathcal{G}_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ , 紫外切断除去の極限を順に取り  $\varphi_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_n, \nu_n)$  の弱収束極限を  $\varphi_{\mathcal{G}}$  とおく. Riesz-Kolmogorove 定理型のコンパクト性の議論を使って部分列が強収束することを示して  $\varphi_{\mathcal{G}} \neq 0$  を示す. これが  $H_{\infty}$  の基底状態を与える. 局所性 1,2 は基底状態から「くりこまれたギブス測度」を構成して証明する.

## 参考文献

- [1] V. Betz, F. Hiroshima, J. Lőrinczi, R. A. Minlos, and H. Spohn. Ground state properties of the Nelson Hamiltonian - A Gibbs measure-based approach. *Rev. Math. Phys.*, 14:173–198, 2002.
- [2] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati, and A. Suzuki. Removal of UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients. *Lett. Math. Phys.*, 101:305–322, 2012.
- [3] M. Griesemer, E. Lieb, and M. Loss. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. *Invent. Math.*, 145:557–595, 2001.
- [4] M. Gubinelli, F. Hiroshima, and J. Lőrinczi. Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration. *J. Funct. Anal.*, 267:3125–3153, 2014.
- [5] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and J. Lőrinczi. Spin-boson model through a Poisson driven stochastic process. *Math. Zeitschrift*, 277:1165–1198, 2014.
- [6] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and H. Spohn. Ground state for point particles interacting through a massless scalar bose field. *Adv. Math.*, 191:339–392, 2005.
- [7] F. Hiroshima. Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz models. *Adv. Math.*, 259:784–840, 2014.
- [8] F. Hiroshima and J. Lőrinczi. Functional integral representations of the Pauli-Fierz model with spin 1/2. *J. Funct. Anal.*, 254:2127–2185, 2008.
- [9] F. Hiroshima and O. Matte. Ground states and their associated Gibbs measures in the renormalized Nelson model. preprint, 2018.
- [10] F. Hiroshima and H. Spohn. Ground state degeneracy of the Pauli-Fierz model with spin. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 5:1091–1104, 2001.
- [11] O. Matte and J. Møller. Feynman-Kac formulas for the ultra-violet renormalized Nelson model. *arXiv:1701.02600*, preprint, 2017.
- [12] E. Nelson. Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field. *J. Math. Phys.*, 5:1990–1997, 1964.