

確率論シンポジウム  
*Probability Symposium*  
RIMS 共同研究（公開型）

2018. 12. 17 ~ 12. 20

研究代表者

会田 茂樹

AIDA, Shigeki

京都大学数理解析研究所

Research Institute for Mathematical Sciences

Kyoto University, Kyoto, Japan

# RIMS 共同研究 (公開型)

## 「確率論シンポジウム」

### プログラム

日時: 平成 30 年 12 月 17 日 (月) ~ 12 月 20 日 (木)

場所: 京都大学数理解析研究所 420 号室 (〒606-8502 京都市左京区北白川追分町)

世話人: 会田茂樹 (東京大学), 久保田直樹 (日本大学), 熊谷隆 (京都大学),  
佐々田槇子 (東京大学), 白石大典 (京都大学)

#### ● 12 月 17 日 (月)

- 9:10 - 9:50 高橋 勇人 (Random Data Lab.)

The distributions of sliding block patterns in finite samples and the inclusion-exclusion principles for partially ordered sets

- 10:00 - 10:40 難波 隆弥 (岡山大学)

Central limit theorem for random walks on nilpotent covering graphs with weak asymmetry

共同研究者: 石渡 聡 (山形大学), 河備 浩司 (慶應義塾大学)

- 10:50 - 11:30 山戸 康祐 (京都大学)

A limit theorem for inverse local times of jumping-in diffusion processes

共同研究者: 矢野 孝次 (京都大学)

- 12:50 - 13:30 野場 啓 (京都大学)

On optimal periodic dividend strategies for Lévy risk processes

共同研究者: José-Luis Pérez (Center for Research in Mathematics), 山崎 和俊 (関西大学),

矢野 孝次 (京都大学)

- 13:40 - 14:20 三角 淳 (高知大学)

Sierpinski gasket 格子上の長距離浸透モデルにおけるランダムウォークの混合時間と等周定数

- 14:30 - 15:10 世良 透 (京都大学)

Functional limit theorem for intermittent interval maps

- 15:20 - 16:00 梶野 直孝 (神戸大学)

The Laplacian on some round Sierpiński carpets and Weyl's asymptotics for its eigenvalues

- 16:10 - 16:50 廣島 文生 (九州大学)

Ground state of the renormalized Nelson model: final version

共同研究者: Oliver Matte

#### ● 12 月 18 日 (火)

- 9:10 - 9:50 金子 宏 (東京理科大学)

ある無限グラフ上の因子に関するリーマン・ロッホの定理について

共同研究者: 厚地 淳 (慶應義塾大学)

- 10:00 - 10:40 藤本 智博 (広島大学)

定常過程に対する MA ブートストラップ

共同研究者: 井上 昭彦 (広島大学), 清水 亮 (オリックス生命)

- 10:50 - 11:30 井上 昭彦 (広島大学)

多変量 ARMA 過程の有限予測係数に対する閉形式表示

- 12:50 – 13:30 山本 航平 (東北大学)  
Percolation と Triangle condition
  - 13:40 – 14:20 高橋 博樹 (慶應義塾大学)  
可算マルコフシフトの大偏差原理とその連分数展開への応用
  - 14:30 – 15:10 矢野 孝次 (京都大学)  
Resolution of sigma-fields for multiparticle finite-state evolution with infinite past  
共同研究者: 伊藤 悠 (京都産業大学), 世良 透 (京都大学)
  - 15:20 – 16:00 吉田 稔 (神奈川大学)  
Frechet 空間上の quasi-regular non-local Dirichlet forms の定式化と、その  $\Phi_3^4$  場の確率量子化への応用  
共同研究者: Sergio Albeverio (Bonn University)
  - 16:10 – 16:55 ショートコミュニケーション
- 12月19日(水)
- 9:10 – 9:50 星野 浄生 (大阪府立大学)  
正則基底に関して Ogawa 可積分な乱関数の SFC による同定
  - 10:00 – 10:40 鈴木 良一 (慶應義塾大学)  
レヴィ市場におけるデジタルオプションに対する局所的リスク最小化問題について
  - 10:50 – 11:30 土屋 貴裕 (会津大学)  
FBSDEs の解とニュートン法について  
共同研究者: 田口 大 (大阪大学)
  - 12:50 – 13:30 桑江 一洋 (福岡大学)  
Conservativeness and Feller property of diffusion processes on Riemannian manifolds with  $m$ -Bakry-Émery Ricci tensor for  $m \leq 1$
  - 13:40 – 14:20 福島 竜輝 (京都大学)  
Geometry of the random walk range conditioned on survival among Bernoulli obstacles  
共同研究者: Jian Ding (University of Pennsylvania), Rongfeng Sun (National University of Singapore), Changji Xu (University of Chicago)
  - 14:30 – 15:10 須崎 清剛 (九州大学)  
A limit theorem for persistence diagrams of random complexes built over marked point processes  
共同研究者: 白井 朋之 (九州大学)
  - 15:20 – 16:00 中島 秀太 (京都大学)  
Fluctuation results in First-passage percolation
  - 16:10 – 16:55 ショートコミュニケーション
- 12月20日(木)
- 9:10 – 9:50 上島 芳倫 (北海道大学)  
確率幾何的表現を用いた量子 Ising 模型の平均場臨界現象の解析  
共同研究者: 坂井 哲 (北海道大学), 半田 悟 (北海道大学)
  - 10:00 – 10:40 星野 壮登 (九州大学)  
Recovering modelled distributions from paracontrolled calculus  
共同研究者: Ismaël Bailleul (Université de Rennes 1)
  - 10:50 – 11:30 名和 範人 (明治大学)  
Nelson 拡散過程と非線形 Schrödinger 方程式
  - 12:50 – 13:30 見上 達哉 (東北大学)  
余次元 1 のホモロジー生成元に関するパーコレーション

- 13:40 – 14:20 須田 颯 (東京大学)  
Superdiffusion of energy in harmonic chains with noises and long-range interactions
- 14:30 – 15:10 藪奥 哲史 (千葉大学)  
Eigenvalue processes of Ginibre ensemble and their properties
- 15:20 – 16:00 針谷 祐 (東北大学)  
A hypercontractive family of the Ornstein–Uhlenbeck semigroup and its connection with  $\Phi$ -entropy inequalities
- 16:10 – 16:50 David Croydon (京都大学)  
Biased random walk on the trace of biased random walk  
共同研究者: Mark Holmes (University of Melbourne)

本研究集会は数理解析研究所からの旅費に加え，以下の科研費の援助を受けています：

基盤研究 (S) 課題番号 16H06338

「無限粒子系の確率解析学」(代表者: 長田博文 (九州大学))

基盤研究 (A) (一般) 課題番号 17H01093

「複雑な系の上の異常拡散現象の解析」(代表者: 熊谷隆 (京都大学))

基盤研究 (A) (一般) 課題番号 18H03672

「大規模相互作用系および関連する確率偏微分方程式の研究」(代表者: 舟木直久 (早稲田大学))

# The distributions of sliding block patterns in finite samples and the inclusion-exclusion principles for partially ordered sets

## Hayato Takahashi<sup>1</sup>

Let  $X \in A^n$  with finite alphabet  $A$  and  $w \in A^*$ . Let  $|w|$  be the length of the word  $w$ . We consider the following random variable,

$$N_w := \sum_{i=1}^n I_{X_i^{i+|w|-1}=w} \text{ where } I_{X_i^{i+|w|-1}=w} = 1 \text{ if } X_i^{i+|w|-1} = w \text{ else } 0.$$

We also call this statistics sliding block patterns. In particular if we count the occurrence of multiple words, it is called suffix tree.

The distributions of sliding block patterns have been shown via generating functions based on induction of sample size, see [1, 2, 3, 5, 4].

In this paper we show the distributions of sliding block patterns for Bernoulli processes with finite alphabet, which is not based on the induction on sample size. We show a new inclusion-exclusion formula in multivariate generating function form on partially ordered sets, and show a simpler expression of generating functions of the number of pattern occurrences in finite samples.

We say that a word  $w$  is overlapping if there is a word  $x$  with  $|w| < |x| < 2|w|$  and  $w$  appears in  $x$  at least 2 times, and  $w$  is called non-overlapping if there is no such  $x$ . We write  $x \sqsubset y$  if  $x$  is a prefix of  $y$ .

**Theorem 1** *Let  $P$  be an i.i.d. process of fixed sample size  $n$  of finite alphabet. Let  $s_1 \sqsubset s_2 \sqsubset \dots \sqsubset s_l$  be an increasing non-overlapping words of finite alphabet, i.e.,  $s_i$  is a prefix of  $s_j$  and  $m_i < m_j$ , where  $m_i$  is the length of  $s_i$ , for all  $i < j$ . Let  $P(s_i)$  be the probability of  $s_i$  for  $i = 1, \dots, l$ . Let*

$$\begin{aligned} A(k_1, \dots, k_l) &= \binom{n - \sum_i m_i k_i + \sum_i k_i}{k_1, \dots, k_l} \prod_{i=1}^l P^{k_i}(s_i), \\ B(k_1, \dots, k_l) &= P\left(\sum_{i=1}^n I_{X_i^{i+m_i-1}=s_j} = k_j, j = 1, \dots, l\right), \\ F_A(z_1, \dots, z_l) &= \sum_{k_1, \dots, k_l} A(k_1, \dots, k_l) z^{k_1} \dots z^{k_l}, \text{ and} \\ F_B(z_1, \dots, z_l) &= \sum_{k_1, \dots, k_l} B(k_1, \dots, k_l) z^{k_1} \dots z^{k_l}. \end{aligned} \tag{1}$$

Then

$$F_A(z_1, z_2, \dots, z_l) = F_B(z_1 + 1, z_1 + z_2 + 1, \dots, z_1 + \dots + z_l + 1).$$

With slight modification of Theorem 1, we can compute the number of the occurrence of the overlapping increasing words. For example, let us consider increasing self-overlapping words 11, 111, 1111 and the number of their occurrences. Let 011, 0111, 01111 then these words are increasing non-self-overlapping words. The number of occurrences 11, 111, 1111 in sample of length  $n$  is equivalent to the number of occurrences 011, 0111, 01111 in sample of length  $n + 1$  that starts with 0. We can apply Theorem 1 to derive the distribution of increasing overlapping words with this manner.

In [5], expectation, variance, and CLTs for the sliding block pattern are shown. We show the general higher moments for non-overlapping words.

---

<sup>1</sup>Random Data Lab. Email: hayato.takahashi@ieee.org

**Theorem 2** *Let  $w$  be a non-overlapping pattern.*

$$\forall t \ E(N_w^t) = \sum_{s=1}^{\min\{T,t\}} A_{t,s} \binom{n - s|w| + s}{s} P^s(w).$$

$$A_{t,s} = \sum_r \binom{s}{r} r^t (-1)^{s-r}, \quad T = \max\{t \in \mathbb{N} \mid n - t|w| \geq 0\}.$$

In the above theorem,  $A_{t,s}$  is the number of surjective functions from  $\{1, 2, \dots, t\} \rightarrow \{1, 2, \dots, s\}$  for  $t, s \in \mathbb{N}$ , see [6].

In [5], it is shown that central limit theorem holds for sliding block patterns,

$$P\left(\frac{N_w - E(N_w)}{\sqrt{V_w}} < x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,$$

where  $w$  is non-overlapping pattern,  $E(N_w) = (n - |w| + 1)P(w)$  and  $V(N_w) = E(N_w) + (n - 2|w| + 2)(n - 2|w| + 1)p^2(w) - E^2(N_w)$ .

Let

$$N'_w := \sum_{i=1}^{\lfloor n/|w| \rfloor} I_{X_{i*|w|}^{(i+1)*|w|-1} = w}.$$

$N'_w$  obeys binomial law if the process is i.i.d. We call  $N'_w$  *block-wise sampling*. As an application of CLT approximation, we compare power functions of sliding block sampling  $N_w$  and block-wise sampling  $N'_w$ . We consider the following test for sliding block patterns: We write  $E_\theta = E(N_w)$  and  $V_\theta = V(N_w)$  if  $P(w) = \theta$ . Null hypothesis:  $P(w) = \theta^*$  vs alternative hypothesis  $P(w) < \theta^*$ . Reject null hypothesis if and only if  $N_w < E_{\theta^*} - 5\sqrt{V_{\theta^*}}$ . The likelihood of the critical region is called power function, i.e.,  $Pow(\theta) := P_\theta(N_w < E_{\theta^*} - 5\sqrt{V_{\theta^*}})$  for  $\theta \leq \theta^*$ .

We construct a test for block-wise sampling: Null hypothesis:  $P(w) = \theta^*$  vs alternative hypothesis  $P(w) < \theta^*$ . Reject null hypothesis if and only if  $N'_w < E'_{\theta^*} - 5\sqrt{V'_{\theta^*}}$ , where  $E'_\theta = \lfloor n/|w| \rfloor \theta$  and  $V'_\theta = \lfloor n/|w| \rfloor \theta(1 - \theta)$ . The following table shows powers of tests for sliding block patterns and block wise sampling at  $\theta = 0.2, 0.18, 0.16$  under the condition that  $\theta^* = 0.25, |w| = 2$ , and  $n = 500$ .

$\theta$	0.2	0.18	0.16
Power of Sliding block	0.316007	0.860057	0.995681
Power of Block wise	0.000295	0.002939	0.021481

#### Acknowledgement

The author thanks for a helpful discussion with Prof. S. Akiyama and Prof. M. Hirayama at Tsukuba University. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

## References

- [1] F. Bassino, J. Clément, and P. Miodème. Counting occurrences for a finite set of words: combinatorial methods. *ACM Trans. Algor.*, 9(4):Article No. 31, 2010.
- [2] I. Goulden and D. Jackson. *Combinatorial Enumeration*. John Wiley, 1983.
- [3] L. Guibas and A. Odlyzko. String overlaps, pattern matching, and nontransitive games. *J. Combin. Theory Ser. A*, 30:183–208, 1981.
- [4] P. Jacquet and W. Szpankowski. *Analytic Pattern Matching*. Cambridge University Press, 2015.
- [5] M. Régnier and W. Szpankowski. On pattern frequency occurrences in a markovian sequence. *Algorithmica*, 22(4):631–649, 1998.
- [6] J. Riordan. *Introduction to combinatorial analysis*. John Wiley, 1958.

# Central limit theorem for random walks on nilpotent covering graphs with weak asymmetry

Ryuya NAMBA (Okayama University)

(Jointwork with Satoshi ISHIWATA (Yamagata) and Hiroshi KAWABI (Keio))

Long time behaviors of random walks (RWs) on an infinite graph is a well-studied topic in geometry, harmonic analysis and graph theory, to say nothing of probability theory. It is known that geometric features such as the *periodicity* and the *volume growth* of the underlying graph affect long time behaviors of RWs. By putting an emphasis on them, Ishiwata, Kawabi and Kotani [1] considered a non-symmetric random walk  $\{w_n\}_{n=0}^\infty$  on a  $\Gamma$ -crystal lattice  $X$ , a covering graph of a finite graph whose covering transformation group  $\Gamma$  is abelian. Through a discrete analogue of the harmonic map from  $X$  into a Euclidean space  $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ , they established two kinds of functional central limit theorems (CLTs) for  $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ . In fact, since a diverging drift term arising from the non-symmetry prevents us from taking the CLT-scaling limit directly, it is difficult to prove such CLTs. To overcome the difficulty, two schemes were introduced in [1]. One is to replace the usual transition operator by the transition-shift operator to “delete” the diverging drift term. The other is to introduce a family of non-symmetric RWs on  $X$  to “weaken” the diverging drift term. (The latter scheme is also applied in the study of the hydrodynamic limit of *weakly asymmetric* simple exclusion processes.)

Let  $\Gamma$  be a finitely generated nilpotent group. In [2], we considered a non-symmetric RW  $\{w_n\}_{n=0}^\infty$  on a  $\Gamma$ -*nilpotent covering graph*, a generalization of both crystal lattices and Cayley graphs of a finitely generated group of polynomial volume growth. By extending the former scheme to the nilpotent case, we established a functional CLT for  $\{w_n\}_{n=0}^\infty$  in [2]. The main purpose of this talk is to extend the latter scheme to the nilpotent case and to establish another functional CLT for  $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ . This talk is based on our recent preprint [3].

Let  $X = (V, E)$  be a  $\Gamma$ -nilpotent covering graph. Here  $V$  is the set of all vertices and  $E$  the set of all oriented edges in  $X$ . For  $e \in E$ , we denote the origin, terminus and inverse edge of  $e$  by  $o(e), t(e)$  and  $\bar{e}$ , respectively. We set  $E_x := \{e \in E \mid o(e) = x\}$  for  $x \in V$ . Let  $p : E \rightarrow (0, 1]$  be a  $\Gamma$ -invariant transition probability and  $(\Omega_x(X), \mathbb{P}_x, \{w_n\}_{n=0}^\infty)$  a RW on  $X$  starting from  $x \in V$  associated with  $p$ . Through the covering map  $\pi : X \rightarrow X_0$ , we also consider the RW  $(\Omega_{\pi(x)}(X_0), \mathbb{P}_{\pi(x)}, \{\pi(w_n)\}_{n=0}^\infty)$  and the corresponding transition probability is also denoted by  $p : E_0 \rightarrow (0, 1]$ . We denote by  $m : V_0 \rightarrow (0, 1]$  the normalized invariant measure on  $X_0$  and also write  $m : V \rightarrow (0, 1]$  for the  $\Gamma$ -invariant lift of  $m$  to  $X$ . Let  $H_1(X_0, \mathbb{R})$  be the first homology group of  $X_0$ . We define the *homological direction* of the RW on  $X_0$  by  $\gamma_p := \sum_{e \in E_0} p(e)m(o(e))e \in H_1(X_0, \mathbb{R})$ . We call the RW on  $X_0$  (*m*-)symmetric if  $p(e)m(o(e)) = p(\bar{e})m(t(e))$  for  $e \in E_0$ . Otherwise, it is called (*m*-)non-symmetric. Note that the RW on  $X_0$  is (*m*-)symmetric if and only if  $\gamma_p = 0$ .

Thanks to the celebrated theorem of Mal'cev, we find a connected and simply connected nilpotent Lie group  $G$  such that  $\Gamma$  is isomorphic to a cocompact lattice in  $G$ . The nilpotent Lie group  $G$  is equipped with the canonical dilations  $(\tau_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ , which gives a scalar multiplication on

$G$ . By realizing  $X$  into  $G$ , CLTs for RWs on  $X$  can be discussed. Let  $\mathfrak{g}$  be the corresponding Lie algebra of  $G$  and  $\mathfrak{g}^{(1)} \cong G/[G, G]$  the generating part of  $\mathfrak{g}$ . We take a canonical surjective linear map  $\rho_{\mathbb{R}} : H_1(X_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{g}^{(1)}$  by using the general theory of covering spaces. Thanks to the map  $\rho_{\mathbb{R}}$  and the discrete Hodge–Kodaira theorem, a flat metric  $g_0$  associated with the transition probability  $p$ , called the *Albanese metric*, is induced on  $\mathfrak{g}^{(1)}$ . A periodic realization  $\Phi_0 : X \rightarrow G$  is said to be *modified harmonic* if

$$\sum_{e \in E_x} p(e) \log \left( \Phi_0(o(e))^{-1} \cdot \Phi_0(t(e)) \right) \Big|_{\mathfrak{g}^{(1)}} = \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) \quad (x \in V).$$

The quantity  $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) \in \mathfrak{g}^{(1)}$  is called the *asymptotic direction*, which also appears in the law of large numbers for  $\mathfrak{g}^{(1)}$ -valued RW  $\{\log(\Phi_0(w_n))\}_{n=0}^{\infty}$ . It should be noted that  $\gamma_p = 0$  implies  $\rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p) = \mathbf{0}_{\mathfrak{g}}$ , however, the converse does not hold in general.

For the given transition probability  $p$ , we introduce a family of  $\Gamma$ -invariant transition probabilities  $(p_{\varepsilon})_{0 \leq \varepsilon \leq 1}$  on  $X$  by  $p_{\varepsilon}(e) := p_0(e) + \varepsilon q(e)$  for  $e \in E$ , where

$$p_0(e) := \frac{1}{2} \left( p(e) + \frac{m(t(e))}{m(o(e))} p(\bar{e}) \right), \quad q(e) := \frac{1}{2} \left( p(e) - \frac{m(t(e))}{m(o(e))} p(\bar{e}) \right).$$

Namely, the family  $(p_{\varepsilon})_{0 \leq \varepsilon \leq 1}$  is given by the linear interpolation between the given transition probability  $p = p_1$  and the ( $m$ -)symmetric probability  $p_0$ . Moreover, the homological direction  $\gamma_{p_{\varepsilon}}$  equals  $\varepsilon \gamma_p$  for every  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , which plays a key role in the proof of main theorems.

We now fix a reference point  $x_* \in V$  such that  $\Phi_0^{(0)}(x_*) = \mathbf{1}_G$ , where  $\mathbf{1}_G$  is the unit element of  $G$ . We write  $g_0^{(\varepsilon)}$  for the Albanese metric on  $\mathfrak{g}^{(1)}$  associated with  $p_{\varepsilon}$  and  $\Phi_0^{(\varepsilon)} : X \rightarrow G$  be the ( $p_{\varepsilon}$ -)modified harmonic realization for every  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . We set  $\mathcal{Y}_{k/n}^{(\varepsilon, n)}(c) := \tau_{n^{-1/2}}(\Phi_0^{(\varepsilon)}(w_k(c)))$  for  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $c \in \Omega_{x_*}(X)$  and  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . We then define a  $G$ -valued continuous stochastic process  $\mathcal{Y}^{(\varepsilon, n)} = (\mathcal{Y}_t^{(\varepsilon, n)})_{0 \leq t \leq 1}$  by the geodesic interpolation of  $\{\mathcal{Y}_{k/n}^{(\varepsilon, n)}\}_{k=0}^n$  with respect to the Carnot–Carathéodory metric on  $G$ . We take an orthonormal basis  $\{V_1, V_2, \dots, V_{d_1}\}$  of  $(\mathfrak{g}^{(1)}, g_0^{(0)})$  and consider a stochastic differential equation (SDE)

$$dY_t = \sum_{i=1}^{d_1} V_i(Y_t) \circ dB_t^i + \rho_{\mathbb{R}}(\gamma_p)(Y_t) dt, \quad Y_0 = \mathbf{1}_G,$$

where  $(B_t)_{0 \leq t \leq 1} = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^{d_1})_{0 \leq t \leq 1}$  is an  $\mathbb{R}^{d_1}$ -standard Brownian motion starting from  $B_0 = \mathbf{0}$ . Let  $(Y_t)_{0 \leq t \leq 1}$  be the  $G$ -valued diffusion process which solves the SDE above.

We now state our main result as follows:

**Theorem.** *Under several natural assumptions on  $\{\Phi_0^{(\varepsilon)}\}_{0 \leq \varepsilon \leq 1}$ , the sequence  $\{\mathcal{Y}^{(n^{-1/2}, n)}\}_{n=1}^{\infty}$  converges in law to a  $G$ -valued diffusion process  $Y$  in  $C^{0, \alpha\text{-Hö}}([0, 1]; G)$  as  $n \rightarrow \infty$  for all  $\alpha < 1/2$ .*

## References

- [1] S. Ishiwata, H. Kawabi and M. Kotani: J. Funct. Anal. **272** (2017), pp.1553–1624.
- [2] S. Ishiwata, H. Kawabi and R. Namba: preprint (2018), [arXiv:1806.03804](https://arxiv.org/abs/1806.03804).
- [3] S. Ishiwata, H. Kawabi and R. Namba: preprint (2018), [arXiv:1808.08856](https://arxiv.org/abs/1808.08856).



# A limit theorem for inverse local times of jumping-in diffusion processes

Kosuke Yamato(Kyoto University)

(joint work with Kouji Yano(Kyoto University))

Let  $X$  be a strong Markov process  $X$  on the half line  $[0, \infty)$  which is a natural scale diffusion up to the first hitting time of 0 and, as soon as  $X$  hits 0,  $X$  jumps into the interior  $(0, \infty)$  and starts afresh. This kind of processes are studied by Feller[1] and Itô[2] and shown that such processes are characterized by the speed measure  $dm$  which characterizes the diffusion on the interior  $(0, \infty)$  and the jumping-in measure  $j$  which characterizes the law of jumps from the boundary 0 to the interior  $(0, \infty)$ . We denote this process by  $X_{m,j}$  and call it a *jumping-in diffusion*.

Let us consider the inverse local time  $\eta_{m,j}$  at 0 of a jumping-in diffusion  $X_{m,j}$ . We study the fluctuation scaling limit of the inverse local time  $\eta_{m,j}$  of the form:

$$\frac{1}{\lambda^{1/\alpha}}(\eta_{m,j}(\lambda t) - b\lambda t) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{d} T(t) \text{ in } \mathbb{D} \quad (1)$$

for some constants  $b \geq 0$  and  $\alpha \in (0, 2]$ . Here  $\mathbb{D}$  denotes the space of càdlàg paths from  $[0, \infty)$  to  $\mathbb{R}$  equipped with Skorokhod's  $J_1$ -topology. In order to obtain the limit, we establish the continuity theorem for jumping-in diffusion processes which roughly asserts the following: for jumping-in diffusions  $\{X_{m_n, j_n}\}_n$ , if their speed measures  $\{dm_n\}_n$  converge to a speed measure  $dm$  in a certain sense and the measures  $\{j_n(dx)\}_n$  degenerate to the point mass at the origin in a certain sense, then for the appropriate constants  $\{b_n\}_n$ , it holds that

$$\eta_{m_n, j_n}(t) - b_n t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \sigma B(t) + T(m; \kappa t) \text{ in } \mathbb{D} \quad (2)$$

for some constants  $\sigma$  and  $\kappa$ . Here  $B$  denotes a standard Brownian motion and  $T(m; t)$  the spectrally positive Lévy process without Gaussian part associated to  $m$  which is independent of  $B$ . In order to prove the continuity theorem, we introduce a class of  $\lambda$ -eigenfunctions of the generalized second

order differential operator  $\frac{d}{dm} \frac{d}{dx}$  and apply Krein-Kotani correspondence and its continuity established in Kotani[4].

As an application of the above result, we study the occupation time of two-sided jumping-in diffusions which are constructed by connecting two jumping-in diffusion processes with respect to 0. Let  $X$  be such a process and define  $A(t) = \int_0^t 1_{(0,\infty)}(X_s) ds$ . We give conditions for the existence of the limit distribution  $\frac{1}{t}A(t)$  as  $t \rightarrow \infty$ . Moreover, in the case where the limit degenerate, that is,

$$\frac{1}{t}A(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} p \in [0, 1] \quad (3)$$

holds, we show the scaling limit of the fluctuation around the limit constant along the exponential clock, that is, the following limit:

$$\frac{1}{\mathbf{e}_{f(q)}}(A(\mathbf{e}_q t) - p\mathbf{e}_q t) \xrightarrow[q \rightarrow +0]{d} Z(t) \quad (4)$$

for a process  $Z(t)$  and a positive function  $f(q)$  which converges to 0 as  $q \rightarrow +0$ . Here  $\mathbf{e}_q$  denotes an exponentially distributed random variable with parameter  $q > 0$  and is independent of  $X$ . This result is a jumping-in version of the result proved for diffusions in Kasahara and Watanabe[3].

## References

- [1] W. Feller. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations. *Ann. of Math. (2)*, 55:468-519, 1952.
- [2] K. Itô. Poisson point processes and their application to Markov processes. *Springer-Briefs in Probability and Mathematical Statistics*. Springer, Singapore, 2015. With a foreword by Shinzo Watanabe and Ichiro Shigekawa.
- [3] Y. Kasahara and S. Watanabe. Brownian representation of a class of Lévy processes and its application to occupation times of diffusion processes. *Illinois J. Math.*, 50(1-4):515-539, 2006.
- [4] S.Kotani. Krein's strings with singular left boundary. *Rep. Math. Phys.*, 59(3):305-316, 2007.

# On optimal periodic dividend strategies for Lévy risk processes

Kei Noba (Kyoto University), José Luis Pérez (CIMAT),  
Kazutoshi Yamazaki (Kansai University) and Kouji Yano (Kyoto University)

## 1 Introduction

This talk is based on [4] and [5]. In this talk, we revisit the optimal periodic dividend problem, in which dividend payments can only be made at the jump times of an independent Poisson process. In the dual (spectrally positive Lévy) model, recent results have shown the optimality of a periodic barrier strategy, which pays dividends at Poissonian dividend-decision times, if and only if the surplus is above some level. In this talk, we show the optimality of this strategy for a spectrally negative Lévy process whose dual has a completely monotone Lévy density. We also consider the version with bail-outs where the surplus must be non-negative uniformly in time. There are many previous studies of spectrally negative cases. Loeffen([3]) and Kyprianou et al.([2]) showed the optimality of a barrier strategy in the classical case and that of a threshold strategy under the absolutely continuous assumption on the dividend strategy, respectively. Avram et al.([1]) and Pérez et al.([7]) showed the optimality of those of the version with bail-outs. In this draft, we give the main results for the models without bail-outs.

## 2 Preliminary facts and main results

Let  $X$  be a spectrally negative Lévy process. Suppose that the Lévy measure of  $-X$  has a completely monotone with respect to the Lebesgue measure. Let  $N^r$  be the Poisson process with rate  $r > 0$  which are independent from  $X$ . Let  $\mathbb{F}$  be the filtration generated from  $X$  and  $N^r$ . In this setting, a strategy  $\pi = \{L_t^\pi : t \geq 0\}$  is a non-decreasing, right-continuous, and  $\mathbb{F}$ -adapted process such that the cumulative amount of dividends  $L^\pi$  admits the form

$$L^\pi(t) = \int_{[0,t]} \nu^\pi(s) dN^r(s), \quad (2.1)$$

for some  $\mathbb{F}$ -adapted càglàd process  $\nu^\pi$ . The surplus process  $U^\pi$  after dividends are deducted is such that

$$U^\pi(t) = X(t) - L^\pi(t) \quad (2.2)$$

where  $\sigma_0^\pi = \inf\{t > 0 : U^\pi(t) < 0\}$  is the corresponding ruin time. We assume that the payment cannot exceed the available surplus and hence

$$0 \leq \nu^\pi(s) \leq U^\pi(s-), \quad s \geq 0. \quad (2.3)$$

We fix  $q > 0$  which is the discount rate. We define the expected net present value of dividends paid until ruin as the following:

$$v_\pi(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_{[0,\sigma_0^\pi]} e^{-qt} dL^\pi(t) \right]. \quad (2.4)$$

Let  $\mathcal{A}_r$  be the set of all admissible strategies. The problem is to compute the value function

$$v_{\pi^*}(x) = v(x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}_r} v_\pi(x). \quad (2.5)$$

For  $b \geq 0$ , the periodic barrier strategy  $\pi^b$  is the strategy which satisfies the

$$\nu^{\pi^b}(t) = (U_r^{\pi^b}(t-) - b) \vee 0, \quad t > 0. \quad (2.6)$$

The strategy  $\pi^b$  was constructed by [6]. The expected NPV  $v^{\pi^b}$  was computed by [6, Corollary 4.4] using the scale functions.

Let  $\Phi$  be the inverse Laplace exponent of  $X$  and  $W^{(q)}$  be the  $q$ -scale function of  $X$ . We denote

$$Z^{(q)}(x, \Phi(q+r)) = r \int_0^\infty e^{-\Phi(q+r)z} W^{(q)}(z+x) dz, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

$$h(b) = e^{-\Phi(q+r)b} (rW^{(q)'}(b) - \Phi(q+r)Z^{(q)'}(b, \Phi(q+r))), \quad b > 0. \quad (2.8)$$

We define

$$b^* = \inf\{b > 0 : h(b) \leq 0\}. \quad (2.9)$$

Then we have the following theorem:

**Theorem 2.1.** *For  $x > 0$ , we have  $v_{\pi^{b^*}}(x) = v(x)$ .*

## References

- [1] F. Avram, Z. Palmowski, and M. R. Pistorius. On the optimal dividend problem for a spectrally negative Lévy process. *Ann. Appl. Probab.*, Vol. 17, No. 1, pp. 156–180, 2007.
- [2] A. E. Kyprianou, R. Loeffen, and J. L. Pérez. Optimal control with absolutely continuous strategies for spectrally negative Lévy processes. *J. Appl. Probab.*, Vol. 49, No. 1, pp. 150–166, 2012.
- [3] R. L. Loeffen. On optimality of the barrier strategy in de Finetti’s dividend problem for spectrally negative Lévy processes. *Ann. Appl. Probab.*, Vol. 18, No. 5, pp. 1669–1680, 2008.
- [4] K. Noba, J. L. Pérez, K. Yamazaki, and K. Yano. On optimal periodic dividend strategies for Lévy risk processes. *Insurance Math. Econom.*, Vol. 80, pp. 29–44, 2018.
- [5] K. Noba, J. L. Pérez, K. Yamazaki, and K. Yano. On optimal periodic dividend and capital injection strategies for spectrally negative Lévy models. *J. Appl. Probab.*, *arXiv:1801.00088*, 2018, to appear.
- [6] J. L. Pérez and K. Yamazaki. Mixed periodic-classical barrier strategies for Lévy risk processes. *Risks*, Vol. 6, No. 2, p. 33, 2018.
- [7] J. L. Pérez, K. Yamazaki, and X Yu. On the bail-out optimal dividend problem. *J. Optim. Theory Appl.*, to appear.

# Sierpinski gasket 格子上の長距離浸透モデルにおけるランダムウォークの混合時間と等周定数

三角 淳 (高知大学)

基本的なフラクタル格子の1つである Sierpinski gasket 格子上での長距離浸透モデルに対して、ランダムグラフ上のランダムウォークの混合時間の評価 ([3]) と、ランダムグラフの等周定数について考える。

平面上の点  $O = (0, 0)$ ,  $u_0 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $v_0 = (1, 0)$  に対して、三角形  $Ou_0v_0$  の3個の頂点と3本の辺からなるグラフを  $G_0$  とする。さらに、 $u_n = 2^n u_0$ ,  $v_n = 2^n v_0$  とし、有限グラフの列  $\{G_n\}_{n=0}^\infty$  を

$$G_{n+1} = G_n \cup (G_n + u_n) \cup (G_n + v_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定義する。 $G = \cup_{n=0}^\infty G_n$  を Sierpinski gasket 格子 (pre-Sierpinski gasket) と呼ぶ。以下では  $G_n$  の頂点集合を  $V_n$  で表す。

$n$  を固定し、有限グラフ  $G_n$  上で長距離浸透モデルの問題を考える。すなわち、 $p(1) = 1$ ,

$$p(k) = 1 - \exp(-\beta k^{-s}) \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

( $\beta, s$  は正の実数) として、各  $x, y \in V_n$  ( $x \neq y$ ) に対して独立に、確率  $p(|x-y|)$  で、2点  $x, y$  がランダムな辺で結ばれるとする。(  $|x-y|$  は、 $G_n$  上における2点間の最短ステップ数。)  $V_n$  に属する頂点と、上記の規則によって作られるランダムな辺からなるランダムグラフを  $G'_n$  とおく。なお、ここでは向き付けられた辺集合を考え、 $x, y$  が辺で結ばれているときには辺  $(x, y)$  と辺  $(y, x)$  が存在しているとみなす。また、 $G_n$  上の長距離浸透モデルに対する確率測度を  $\mathbb{P}$  で表す。

ランダムグラフ  $G'_n$  の形状を固定するごとに、その上で、推移確率  $P(x, y) = P(X_{t+1} = y | X_t = x)$  が

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\deg(x)} & (x \neq y \text{ かつ } x, y \text{ が } G'_n \text{ 上の隣接点のとき}) \\ \frac{1}{2} & (x = y \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (x, y \in V_n)$$

( $\deg(x)$  は  $x$  から出ている辺の本数) で与えられる離散時間 lazy random walk  $\{X_t\}_{t=0}^\infty$  を考え、 $\{X_t\}_{t=0}^\infty$  の混合時間を  $\tau(G'_n)$  とおく。なお、以下では  $d = \log 3 / \log 2$  とする。

**定理 1 ([3])**  $d < s < 2d$  のとき、正の定数  $c_1, c_2$  が存在して次が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} (c_1 2^{(s-d)n} \leq \tau(G'_n) \leq c_2 2^{(s-d)n}) = 1.$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  上の長距離浸透モデルに対しては、 $\tau(G'_n)$  に相当する量が  $1 < s < 2$  のとき  $n^{s-1}$  のオーダー、 $s > 2$  のとき  $n^2$  のオーダーとなり、 $s = 2$  の前後で不連続に変化することが [1] で示されている。([2] で証明の一部が修正されている。) 一方、Sierpinski gasket 格子上の長距離浸透モデルの場合には、 $s > 2d$  のときの  $\tau(G'_n)$  の評価はまだ得られていない。

以下では、 $\tau(G'_n)$  と深い関係を持つ量であるランダムグラフの等周定数について考える。 $\pi = (\pi(x))_{x \in V_n}$  を  $G'_n$  上の lazy random walk  $\{X_t\}_{t=0}^\infty$  の定常分布とし、 $Q(x, y) = \pi(x)P(x, y)$  ( $x, y \in V_n$ ) とおく。また、 $A, B \subset V_n$  に対して  $\pi(A) = \sum_{x \in A} \pi(x)$ ,  $Q(A, B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} Q(x, y)$  と書く。

$$\phi^* = \min_{\substack{D \subset V_n \\ 0 < \pi(D) \leq \frac{1}{2}}} \frac{Q(D, D^c)}{\pi(D)}$$

を等周定数と呼ぶ。

**命題 2** (1)  $d < s < 2d$  のとき、正の定数  $c_3, c_4$  が存在して次が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} (n^{-c_3} 2^{(d-s)n} \leq \phi^* \leq c_4 2^{(d-s)n}) = 1.$$

(2)  $s \geq 2d$  のとき、正の定数  $c_5, c_6$  が存在して次が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} (c_5 n^{-1} 3^{-n} \leq \phi^* \leq c_6 n 3^{-n}) = 1.$$

## 参考文献

- [1] Benjamini, I., Berger, N., Yadin, A. Long-range percolation mixing time. *Combin. Probab. Comput.* **17**, 487–494 (2008)
- [2] Benjamini, I., Berger, N., Yadin, A. Long-range percolation mixing time. arXiv:math/0703872v2. (2009)
- [3] Misumi, J. The mixing time of a random walk on a long-range percolation cluster in pre-Sierpinski gasket. *J. Stat. Phys.* **165**, 153–163 (2016)

# Functional limit theorem for intermittent interval maps

Toru Sera (Kyoto University)

Interval maps with indifferent fixed points have been studied as models of intermittent phenomena, such as intermittent transitions to turbulent flow in convective fluid. In this context, the occupations near indifferent fixed points correspond to long regular or *laminar phases*, while the occupations away from them correspond to short irregular or *turbulent* bursts. There have been many studies of scaling limits of the occupations near and away from them, e.g., [1, 7, 8, 10, 4, 6]. In this talk, we present a functional and joint-distributional refinement of them, based on [5]. It is motivated particularly by [2, 3, 9].

We impose the following assumption from now on:

**Assumption.** An interval map  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  satisfies the following conditions:

- (1) (for simplicity)  $T$  is point-symmetric, i.e.,  $Tx = 1 - T(1 - x)$ ,  $x \in (1/2, 1]$ .
- (2) the restriction  $T|_{[0, 1/2]} : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  is a  $C^2$ -bijective map.
- (3)  $T0 = 0$ ,  $T'0 = 1$  and  $T''x > 0$ ,  $x \in (0, 1/2)$ .

Note that 0 and 1 are indifferent fixed points of  $T$ . We know that  $T$  has a unique (up to scalar multiplication)  $\sigma$ -finite invariant measure  $\mu(dx)$  equivalent to the Lebesgue measure  $dx$ . From now on, let us fix  $\delta \in (0, 1/2)$ . Then, it holds that  $\mu([0, \delta]) = \mu((1 - \delta, 1]) = \infty$  and  $\mu([\delta, 1 - \delta]) < \infty$ . Hence Birkhoff's pointwise ergodic theorem implies

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{T^k x \in [\delta, 1 - \delta]\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \left( \text{equivalently, } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{T^k x \notin [\delta, 1 - \delta]\}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \right), \quad \text{a.e. } x.$$

Roughly speaking, the orbit  $(x, Tx, T^2x, \dots)$  of almost every starting point  $x$  is concentrated close to 0 and 1. We are interested in non-trivial scaling limits of occupation times for  $[0, \delta]$ ,  $[\delta, 1 - \delta]$  or  $(1 - \delta, 1]$ . Let us denote by  $\varphi(N) = \varphi(N, x)$  the  $N$ th hitting time of  $(x, Tx, T^2x, \dots)$  for  $[\delta, 1 - \delta]$ :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{and} \quad \varphi(N + 1) = \min\{k > \varphi(N) : T^k x \in [\delta, 1 - \delta]\}, \quad N \geq 0.$$

We will denote by  $\bar{\mu} = \mu([\delta, 1 - \delta] \cap \cdot) / \mu([\delta, 1 - \delta])$  the normalized restriction of  $\mu$  over  $[\delta, 1 - \delta]$ . We now present our main result.

**Theorem** (S. [5]). *Let  $\alpha \in (0, 1)$ , and let  $\xi$  be a  $[0, 1]$ -valued random variable with  $\mathbb{P}[\xi \in dx] \ll dx$ . Then the following conditions are equivalent:*

(i)  $Tx - x = (1 - x) - T(1 - x)$  is regularly varying of index  $(1 + 1/\alpha)$  at 0.

(ii) it holds that

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\varphi([b_n t])} \mathbb{1}_{\{T^k \xi < \delta\}}, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\varphi([b_n t])} \mathbb{1}_{\{T^k \xi > 1 - \delta\}} : t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (S_-^{(\alpha)}(t), S_+^{(\alpha)}(t) : t \geq 0), \quad \text{in } D,$$

where  $b_n := 1/\bar{\mu}[\varphi(1) > n]$ , and  $S_-^{(\alpha)}(t)$  and  $S_+^{(\alpha)}(t)$  are i.i.d.  $\alpha$ -stable subordinators with Lévy measure  $\frac{\alpha}{2}r^{-1-\alpha}dr$ ,  $r > 0$ .

(iii) it holds that

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{[nt]} \mathbb{1}_{\{T^k \xi < \delta\}}, \frac{\Gamma(1 - \alpha)}{b_n} \sum_{k=0}^{[nt]} \mathbb{1}_{\{T^k \xi \in [\delta, 1 - \delta]\}}, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{[nt]} \mathbb{1}_{\{T^k \xi > 1 - \delta\}} : t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \left( \int_0^t \mathbb{1}_{\{Z^{(\alpha)}(s) < 0\}} ds, L^{(\alpha)}(t), \int_0^t \mathbb{1}_{\{Z^{(\alpha)}(s) > 0\}} ds : t \geq 0 \right), \quad \text{in } D,$$

where  $Z^{(\alpha)}(t)$  denotes a  $(2 - 2\alpha)$ -dimensional symmetric Bessel diffusion process starting from the origin, and  $L^{(\alpha)}(t)$  denotes the local time of  $Z^{(\alpha)}(t)$  at the origin in the Blumenthal–Gettoor normalization.

## References

- [1] J. Aaronson. The asymptotic distributional behaviour of transformations preserving infinite measures. *J. Analyse Math.*, 39:203–234, 1981.
- [2] M. Barlow, J. Pitman and M. Yor. Une extension multidimensionnelle de la loi de l’arc sinus. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 294–314. Springer, Berlin, 1989.
- [3] E. Fujihara, Y. Kawamura and Y. Yano. Functional limit theorems for occupation times of Lamperti’s stochastic processes in discrete time. *J. Math. Kyoto Univ.*, 47(2):429–440, 2007.
- [4] T. Owada and G. Samorodnitsky. Functional central limit theorem for heavy tailed stationary infinitely divisible processes generated by conservative flows. *Ann. Probab.*, 43(1):240–285, 2015.
- [5] T. Sera. Functional limit theorem for occupation time processes of infinite ergodic transformations. preprint available at arXiv:1810.04571.
- [6] T. Sera and K. Yano. Multiray generalization of the arcsine laws for occupation times of infinite ergodic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- [7] M. Thaler. A limit theorem for sojourns near indifferent fixed points of one-dimensional maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(4):1289–1312, 2002.
- [8] M. Thaler and R. Zweimüller. Distributional limit theorems in infinite ergodic theory. *Probab. Theory Related Fields*, 135(1):15–52, 2006.
- [9] M. Tyran-Kamińska. Convergence to Lévy stable processes under some weak dependence conditions. *Stochastic Process. Appl.*, 120(9):1629–1650, 2010.
- [10] R. Zweimüller. Infinite measure preserving transformations with compact first regeneration. *J. Anal. Math.*, 103:93–131, 2007.



# The Laplacian on some round Sierpiński carpets and Weyl's asymptotics for its eigenvalues

Naotaka Kajino (Kobe University)

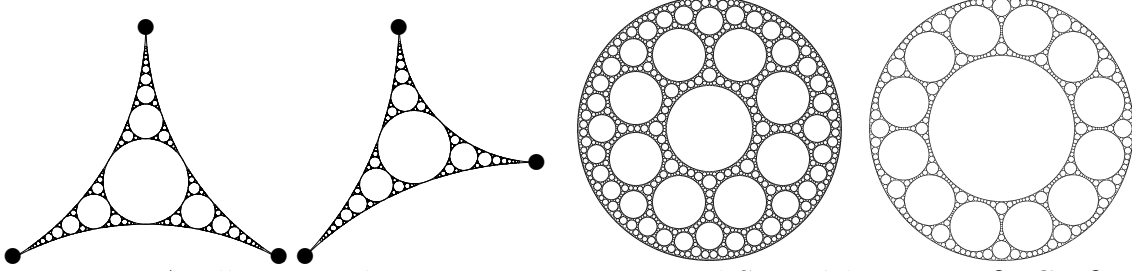


Fig. 1. Apollonian gaskets  $K_{\alpha, \beta, \gamma}$  Fig. 2. Round Sierpiński carpets  $\partial_\infty G_8, \partial_\infty G_{12}$

The purpose of this talk is to present the speaker's recent results on the construction of a “canonical” Laplacian on round Sierpiński carpets invariant with respect to certain Kleinian groups (i.e., discrete subgroups of the group  $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$  of (orientation preserving or reversing) Möbius transformations on  $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ) and on Weyl's asymptotics for its eigenvalues. Here a *round Sierpiński carpet* refers to a subset of  $\widehat{\mathbb{C}}$  homeomorphic to the standard Sierpiński carpet whose complement consists of disjoint open disks in  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

## 1. Preceding results for the Apollonian gasket

The construction of the Laplacian is based on the speaker's preceding study of the simplest case of the *Apollonian gasket*  $K_{\alpha, \beta, \gamma}$ . This is a compact fractal subset of  $\mathbb{C}$  obtained from an ideal triangle, i.e., the closed subset of  $\mathbb{C}$  enclosed by mutually *externally* tangent three circles, with the radii of the circles  $\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1}$  and with the set  $V_0^{\alpha, \beta, \gamma}$  of its three vertices (see Fig. 1). Set  $\mathcal{C}(K_{\alpha, \beta, \gamma}) := \{f \mid f : K_{\alpha, \beta, \gamma} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ is continuous}\}$ .

**Theorem 1.1** (K., cf. [5]). *There exist a finite Borel measure  $\mu$  on  $K_{\alpha, \beta, \gamma}$  with full support and an irreducible, strongly local, regular symmetric Dirichlet form  $(\mathcal{E}^{\alpha, \beta, \gamma}, \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma})$  on  $L^2(K_{\alpha, \beta, \gamma}, \mu)$  such that for any affine function  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h|_{K_{\alpha, \beta, \gamma}} \in \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}$  and*

$$\mathcal{E}^{\alpha, \beta, \gamma}(h|_{K_{\alpha, \beta, \gamma}}, v) = 0 \quad \text{for any } v \in \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma} \cap \mathcal{C}(K_{\alpha, \beta, \gamma}) \text{ with } v|_{V_0^{\alpha, \beta, \gamma}} = 0 \quad (1.1)$$

(i.e.,  $h|_{K_{\alpha, \beta, \gamma}}$  is  $\mathcal{E}^{\alpha, \beta, \gamma}$ -harmonic on  $K_{\alpha, \beta, \gamma} \setminus V_0^{\alpha, \beta, \gamma}$ ). Moreover,  $\mathcal{C}_{\alpha, \beta, \gamma} := \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma} \cap \mathcal{C}(K_{\alpha, \beta, \gamma})$  and  $\mathcal{E}^{\alpha, \beta, \gamma}|_{\mathcal{C}_{\alpha, \beta, \gamma} \times \mathcal{C}_{\alpha, \beta, \gamma}}$  are unique (up to positive constant multiples of  $\mathcal{E}^{\alpha, \beta, \gamma}|_{\mathcal{C}_{\alpha, \beta, \gamma} \times \mathcal{C}_{\alpha, \beta, \gamma}}$ ).

**Theorem 1.2** (K.).  $\mathcal{C}_{\alpha, \beta, \gamma}^{\text{LIP}} := \{u|_{K_{\alpha, \beta, \gamma}} \mid u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ is Lipschitz}\} \subset \mathcal{C}_{\alpha, \beta, \gamma}$  and

$$\mathcal{E}^{\alpha, \beta, \gamma}(u, v) = \sum_{C \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta, \gamma}} \text{rad}(C) \int_C \langle \nabla_C u, \nabla_C v \rangle d\text{vol}_C \quad \text{for any } u, v \in \mathcal{C}_{\alpha, \beta, \gamma}^{\text{LIP}}, \quad (1.2)$$

where  $\mathcal{A}_{\alpha, \beta, \gamma}$  denotes the set of all the arcs appearing in the construction of  $K_{\alpha, \beta, \gamma}$ ,  $\text{rad}(C)$  the radius of  $C$ ,  $\nabla_C$  the gradient on  $C$  and  $\text{vol}_C$  the length measure on  $C$ .

**Theorem 1.3** (K.). *As the measure  $\mu$  in Theorem 1.1,  $\mu^{\alpha, \beta, \gamma} := \sum_{C \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta, \gamma}} \text{rad}(C) \text{vol}_C$  can be taken. Moreover, the Laplacian associated with  $(K_{\alpha, \beta, \gamma}, \mu^{\alpha, \beta, \gamma}, \mathcal{E}^{\alpha, \beta, \gamma}, \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma})$  has discrete spectrum and its eigenvalues  $\{\lambda_n^{\alpha, \beta, \gamma}\}_{n \in \mathbb{N}}$  (with each repeated according to multiplicity) satisfy, with<sup>1</sup>  $d_{\text{AG}} := \dim_{\text{H}} K_{\alpha, \beta, \gamma}$  and some  $c_0 \in (0, \infty)$  independent of  $\alpha, \beta, \gamma$ ,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-d_{\text{AG}}/2} \#\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n^{\alpha, \beta, \gamma} \leq \lambda\} = c_0 \mathcal{H}^{d_{\text{AG}}}(K_{\alpha, \beta, \gamma}) \in (0, \infty). \quad (1.3)$$

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 25887038, 15K17554, 18K18720.

Keywords: Kleinian groups, round Sierpiński carpets, Laplacian, Weyl's eigenvalue asymptotics.

<sup>1</sup>  $\dim_{\text{H}}$  and  $\mathcal{H}^d$  denote Hausdorff dimension and the  $d$ -dimensional Hausdorff measure, respectively.

## 2. Kleinian groups $G_m$ with limit set a round Sierpiński carpet

Let  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 6$ . Since  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{m} < \pi$  there exists a geodesic triangle with inner angles  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{m}$ , which is unique up to hyperbolic isometry, in the Poincaré disk model  $\mathbb{B}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  of the hyperbolic plane. More specifically, set  $\ell_1 := \mathbb{R}$ ,  $\ell_3 := \{te^{\pi i/m} \mid t \in \mathbb{R}\}$  and choose  $t, r \in (0, \infty)$  so that  $\ell_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - te^{\pi i/m}| = r\}$  is orthogonal to  $\partial\mathbb{B}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  and intersects  $\ell_1$  with angle  $\frac{\pi}{3}$ ; there is a unique such choice of  $t, r$  by virtue of  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{m} < \pi$ . Let  $\Delta_0$  denote the closed geodesic triangle formed by  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  and define a subgroup  $\Gamma_m$  of  $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$  by  $\Gamma_m := \langle \{\text{Inv}_{\ell_k}\}_{k=1}^3 \rangle$ , where  $\text{Inv}_\ell$  denotes the inversion (reflection) in a circle or a straight line  $\ell$ . Then *Poincaré's polygon theorem* (see, e.g., [2, Section 8]) tells us that  $\mathbb{B}^2 = \bigcup_{\tau \in \Gamma_m} \tau(\Delta_0)$ , where  $\tau(\Delta_0)$  and  $\sigma(\Delta_0)$  intersect only on their boundaries for any  $\tau, \sigma \in \Gamma_m$  with  $\tau \neq \sigma$ .

Next, choose  $r_m \in (0, 1)$  so that  $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r_m\}$  intersects  $\ell_2$  with angle  $\frac{\pi}{3}$ ; it is elementary to see that there is a unique such choice of  $r_m$ . Then it turns out (see, e.g., [1]) that the subgroup  $G_m$  of  $\text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}})$  defined by  $G_m := \langle \Gamma_m, \text{Inv}_S \rangle$  is a Kleinian group and that  $\partial_\infty G_m := \bigcup_{g \in G_m} g(\partial\mathbb{B}^2)$  is the *limit set* of  $G_m$  (i.e., the minimum non-empty closed  $G_m$ -invariant subset of  $\widehat{\mathbb{C}}$ ) and is in fact a round Sierpiński carpet (being homeomorphic to the standard Sierpiński carpet follows from [6]).

Set  $K_0 := (\partial_\infty G_m) \cap \mathbb{B}^2$ ,  $\mathcal{G} := \{g \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{C}}) \mid g^{-1}(\infty) \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{B}^2}\}$  and  $K_g := g(K_0)$  for  $g \in \mathcal{G}$ . Also set  $\mathcal{D}_g := \{gh(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{B}^2}) \mid h \in G_m\} \setminus \{g(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{B}^2})\}$ , so that  $\mathcal{D}_g$  is a family of disjoint open disks in  $\mathbb{C}$  with  $K_g = g(\mathbb{B}^2) \setminus \bigcup_{D \in \mathcal{D}_g} D$ . Now we adopt (1.2) as the *definition* of the Dirichlet form on  $K_g$  and similarly for the volume measure on  $K_g$ .

**Definition 2.1** (K.). Let  $g \in \mathcal{G}$  and set  $\mathcal{C}_g := \{u|_{K_g} \mid u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ is Lipschitz}\}$ . We define a Borel measure  $\nu^g$  on  $K_g$  and a symmetric bilinear form  $\mathcal{E}^g : \mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_g \rightarrow \mathbb{R}$  by

$$\nu^g := \sum_{D \in \mathcal{D}_g} \text{rad}(\partial D) \text{vol}_{\partial D}, \quad \mathcal{E}^g(u, v) := \sum_{D \in \mathcal{D}_g} \text{rad}(\partial D) \int_{\partial D} \langle \nabla_{\partial D} u, \nabla_{\partial D} v \rangle d\text{vol}_{\partial D}.$$

**Proposition 2.2** (K.). *On  $L^2(K_g, \nu^g)$ ,  $(\mathcal{E}^g, \mathcal{C}_g)$  is closable and its closure  $(\mathcal{E}^g, \mathcal{F}_g)$  is a strongly local regular Dirichlet form whose associated Laplacian has discrete spectrum.*

Since  $G_m$  is convex cocompact (hence Gromov hyperbolic),  $d_m := \dim_{\mathbb{H}} K_g \in (1, 2)$  and  $\mathcal{H}^{d_m}(K_g) \in (0, \infty)$  by [4, Theorem 7]. The following is the main result of this talk.

**Theorem 2.3** (K.). *There exists  $c_m \in (0, \infty)$  such that for any  $g \in \mathcal{G}$ , the eigenvalues  $\{\lambda_n^g\}_{n \in \mathbb{N}}$  (with each eigenvalue repeated according to its multiplicity) of the (non-negative definite) Laplacian associated with  $(K_g, \nu^g, \mathcal{E}^g, \mathcal{F}_g)$  satisfy*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-d_m/2} \#\{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_n^g \leq \lambda\} = c_m \mathcal{H}^{d_m}(K_g). \quad (2.1)$$

Theorem 2.3 is proved by applying *Kesten's renewal theorem* [3, Theorem 2] to a certain Markov chain on the *space of "all possible Euclidean shapes of  $K_g$ "* defined by  $H \setminus \mathcal{G} := \{Hg \mid g \in \mathcal{G}\}$ , where  $H$  denotes the group of Euclidean similarities of  $\mathbb{C}$ .

## References

- [1] S. Bullett and G. Mantica, *Nonlinearity* **5** (1992), 1085–1109.
- [2] D. B. A. Epstein and C. Petronio, *Enseign. Math.* **40** (1994), 113–170.
- [3] H. Kesten, *Ann. Probab.* **2** (1974), 355–386.
- [4] D. Sullivan, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **50** (1979), 171–202.
- [5] A. Teplyaev, in: M. L. Lapidus and M. van Frankenhuysen (eds.), *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 72, Part 1, Amer. Math. Soc., 2004, pp. 131–154.
- [6] G. T. Whyburn, *Fund. Math.* **45** (1958), 320–324.

# Ground state of the renormalized Nelson model: final version

廣島 文生 九大・数理

この研究は Oliver Matte (Aalborg 大学) との共同研究 [9] である. シュレディンガー作用素と結合した量子場の模型でスペクトルがよく研究されている典型的なものに Nelson 模型がある. 過去 2013 年の「確率論シンポ」, 2014 年と 2017 年の「確率解析とその周辺」で Nelson 模型のくりこみ理論について発表した. 今回大きく研究が進展しほぼ最終的な形を得ることができた. 簡単に物理的な説明をする. Nelson 模型は非相対論的なスピンのない核子とスカラー中間子の線形相互作用を表している. 相互作用は Yukawa 型相互作用と呼ばれる. スピンのある場合は [10, 8] を参照. Nelson 模型を自己共役作用素として定義するためにはまず紫外切断が必要で, そのとき

$$H = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + g\phi$$

と定義される. ここで,  $g \in \mathbb{R}$  は結合定数を表す. この紫外切断がくりこめることを Nelson 自身が約 50 年前に証明している [12]: “ $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F}$  上の自己共役作用素  $H_\infty$  で  $s \rightarrow \lim_{\epsilon \downarrow 0} e^{-T(H-E)} = e^{-TH_\infty}$  となるものが存在する. ここで  $E$  はくりこみ項”.

**注意:**

- (1) Path 測度を用いた別証明が [4] で与えられている.
  - (2) 多様体上の Nelson 模型のくりこみについては [2] を参照.
  - (3) Nelson は強位相での収束を示したが, 一様位相で収束を示すことができる [11].
  - (4)  $H_\infty$  の明示的な形はわかっていないが, Nelson 自身は  $H_\infty$  を二次形式で与えた.
  - (5) [4, 11] では  $e^{-tH_\infty}$  の Feynman-Kac 公式が与えられた.
  - (6)  $H_\infty$  の基底状態に関しては [6] で結合定数が十分小さいときに存在が示されている.
  - (7) 紫外切断があるとき基底状態の性質はギブス測度を用いて [1, 7, 5] で調べられている.
- $H_\infty$  の基底状態  $\varphi_g$  に関して次の結果を得た.  $V$  は Kato-分解可能クラスで binding 条件 [3] を満たすと仮定する.  $\kappa \geq 0$  を赤外切断パラメーター,  $N$  は個数作用素とする.

**存在:**  $\kappa > 0$  のとき  $H_\infty$  の基底状態  $\varphi_g$  が存在し, 一意的である.

**局所性 1:**  $\kappa > 0$  とする. このとき  $\|e^{\beta N} \varphi_g\| < \infty$  が任意の  $\beta > 0$  で成り立つ.

**局所性 2:**  $\kappa > 0$  とする. このとき

- (1)  $\|e^{\beta \phi(h)^2} \varphi_g\| < \infty$  が任意の  $\beta < 1/\|h/\sqrt{|k|}\|^2$  で成り立つ.
- (2)  $\lim_{\beta \uparrow 1/\|h/\sqrt{|k|}\|^2} \|e^{\beta \phi(h)^2} \varphi_g\| = \infty$

**非存在:**  $\kappa = 0$  のとき基底状態は存在しない.

**非 Fock 表現:**  $H_\infty^G$  を  $H_\infty$  の Gross 変換とする.  $H_\infty^G$  は  $\kappa > 0$  で  $H_\infty$  とユニタリー同値. さらに, 任意の  $\kappa \geq 0$  で基底状態が存在する.

基底状態の存在証明のアイデアを簡単に述べる. 仮想的な質量  $\nu > 0$  を導入し, さらに [11] の Feynman-Kac 公式を使って有界な開集合  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$  上に stopping time を使って  $H$  を定義し直す. それを  $H(\mathcal{G}, \nu)$  とおく.  $e^{-tH(\mathcal{G}, \nu)}$  の hypercontractivity を示して  $H(\mathcal{G}, \nu)$  が基底状態をもつことを示す. それを  $\varphi_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}, \nu)$  とする. massless 極限  $\nu_n \rightarrow 0$ , 無限体積極限  $\mathcal{G}_n \rightarrow \mathbb{R}^3$ , 紫外切断除去の極限を順に取り  $\varphi_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}_n, \nu_n)$  の弱収束極限を  $\varphi_{\mathcal{G}}$  とおく. Riesz-Kolmogorove 定理型のコンパクト性の議論を使って部分列が強収束することを示して  $\varphi_{\mathcal{G}} \neq 0$  を示す. これが  $H_{\infty}$  の基底状態を与える. 局所性 1,2 は基底状態から「くりこまれたギブス測度」を構成して証明する.

## 参考文献

- [1] V. Betz, F. Hiroshima, J. Lőrinczi, R. A. Minlos, and H. Spohn. Ground state properties of the Nelson Hamiltonian - A Gibbs measure-based approach. *Rev. Math. Phys.*, 14:173–198, 2002.
- [2] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati, and A. Suzuki. Removal of UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients. *Lett. Math. Phys.*, 101:305–322, 2012.
- [3] M. Griesemer, E. Lieb, and M. Loss. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. *Invent. Math.*, 145:557–595, 2001.
- [4] M. Gubinelli, F. Hiroshima, and J. Lőrinczi. Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration. *J. Funct. Anal.*, 267:3125–3153, 2014.
- [5] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and J. Lőrinczi. Spin-boson model through a Poisson driven stochastic process. *Math. Zeitschrift*, 277:1165–1198, 2014.
- [6] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and H. Spohn. Ground state for point particles interacting through a massless scalar bose field. *Adv. Math.*, 191:339–392, 2005.
- [7] F. Hiroshima. Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz models. *Adv. Math.*, 259:784–840, 2014.
- [8] F. Hiroshima and J. Lőrinczi. Functional integral representations of the Pauli-Fierz model with spin 1/2. *J. Funct. Anal.*, 254:2127–2185, 2008.
- [9] F. Hiroshima and O. Matte. Ground states and their associated Gibbs measures in the renormalized Nelson model. preprint, 2018.
- [10] F. Hiroshima and H. Spohn. Ground state degeneracy of the Pauli-Fierz model with spin. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 5:1091–1104, 2001.
- [11] O. Matte and J. Møller. Feynman-Kac formulas for the ultra-violet renormalized Nelson model. *arXiv:1701.02600*, preprint, 2017.
- [12] E. Nelson. Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field. *J. Math. Phys.*, 5:1990–1997, 1964.

**ある無限グラフ上の因子に関するリーマン・ロッホの定理について**  
(On a Riemann-Roch theorem for divisors on an infinite graph)

厚地 淳, 金子 宏 (A. Atsuji and H. Kaneko)

**1. Riemann-Roch theorem on a weighted finite graph**

Let  $G = (V_G, E_G)$  be a connected graph consisting of finite set  $V_G$  of vertices and of finite set  $E_G$  of edges. We assume that weight  $C_{x,y}$  is given at every edge  $\{x, y\} \in E_G$ .

For every vertex  $x \in V_G$ , define  $N(x) = \{y \in V_G \mid \{x, y\} \in E_G\}$  and  $i(x) = \min\{|\sum_{y \in N(x)} f(y)C_{x,y}| \in (0, \infty) \mid f : V_G \rightarrow \mathbb{Z}\}$ .

notions	probabilistic materials
weight on edges	conductance $C_{x,y}$ between $x$ and $y$
weight at vertices	$i(x)$
divisor	$D = \sum_{x \in V_G} \ell(x)i(x)1_{\{x\}}$
degree of divisor	$\deg(D) = \sum_{x \in V_G} \ell(x)i(x)$
canonical divisor	$K_G = \sum_{x \in V_G} \{\sum_{y \in N(x)} C_{x,y} - 2i(x)\}1_{\{x\}}$
Laplacian of $f$ at $x \in V_G$	$\Delta f(x) = \sum_{y \in N(x)} C_{x,y}(f(x) - f(y))$
Euler-like characteristic	$\epsilon_{(V,C)} = \sum_{x \in V_G} i(x) - \sum_{\{x,y\} \in E_G} C_{x,y}$

A divisor  $D = \sum_{x \in V_G} \ell(x)i(x)1_{\{x\}}$  is said to be effective, if  $\ell(x) \geq 0$  for all  $x \in V_G$ . We need also the canonical divisor  $K_G = \sum_{x \in V_G} \{\sum_{y \in N(x)} C_{x,y} - 2i(x)\}1_{\{x\}}$  and the family of total orders on  $V_G$  denoted by  $\mathcal{O}$ . For each  $O \in \mathcal{O}$ , its inverted total order  $\bar{O}$  is defined by  $x <_{\bar{O}} y$  for any  $x, y \in V_G$  satisfying  $y <_O x$ . We introduce the divisor

$$\nu_O(x) = \sum_{y \in N(x), y <_O x} C_{x,y} - i(x), \quad x \in V_G$$

of degree  $-\epsilon_{(V,C)} = \sum_{\{x,y\} \in E_G} C_{x,y} - \sum_{x \in V_G} i(x)$  admitting only non-effective equivalent divisors.

We introduce an equivalence between divisors  $D$  and  $D'$  and notation for the equivalence class given by

$$D \sim D' \Leftrightarrow D' = D + \Delta f \text{ for some } \mathbb{Z}\text{-valued function } f, \\ |D| = \{D' \mid D' \text{ is effective and equivalent with } D\}.$$

For any divisor  $D$  and non-negative integer  $k$ , we take

$$E_k(D) = \{ \text{effective divisors } E \mid \deg(E) = i_{(V,C)}k \text{ satisfying } |D - E| \neq \emptyset \}$$

to define the dimension  $r(D)$  of the divisor  $D$  by

$$r(D) = \begin{cases} -i_{(V,C)}, & \text{if } E_0(D) = \emptyset, \\ \max\{i_{(V,C)}k \mid E_k(D) \text{ consists of all effective divisors of degree } i_{(V,C)}k\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**Theorem (Riemann-Roch theorem on weighted finite graph).** For any divisor  $D$ ,

$$r(D) - r(K_G - D) = \deg(D) + \epsilon_{(V,C)}.$$

Similarly to M. Baker and S. Norine's article [1], we can prove this assertion, the corner stones of which are the following assertions:

(RR) For each divisor  $D$ , there exists an  $O \in \mathcal{O}$  such that either  $|D|$  or  $|\nu_O - D|$  is empty.

**Proposition 1** (RR) implies  $r(D) = \left( \min_{D' \sim D, O \in \mathcal{O}} \deg^+(D' - \nu_O) \right) - i_{(G,C)}$  for any divisor  $D$ , where  $i_{(G,C)} = \min\{|\sum_{x \in V_G} \ell(x)i(x)| \in (0, \infty) \mid \ell : V_G \rightarrow \mathbb{Z}\}$  and  $\deg^+(D) = \sum_{\ell(x) > 0} \ell(x)i(x)$  for divisor  $D = \sum_{x \in V_G} \ell(x)i(x)1_{\{x\}}$ .

## 2. Riemann-Roch theorem in an infinite graph

Throughout this section we consider an infinite graph  $G = (V_G, E_G)$  with locally finiteness and finite volume, namely, the function  $\#N(x)$  given by  $N(x) = \{y \mid \{x, y\} \in E_G\}$  is integer valued and the total volume  $m(V) = \sum_{x \in V} m(x)$  given by  $m(x) = \sum_{y \in N(x)} C_{x,y}$  is finite.

For any pair  $\{x, y\}$  of distinct elements in  $V_G$ , we define the graph metric  $d(x, y)$  between  $x, y$  by  $d(x, y) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \{z_0, z_1\}, \{z_1, z_2\}, \dots, \{z_{k-1}, z_k\} \in E_G \text{ for some } z_1, \dots, z_{k-1} \in V_G \text{ with } z_0 = x, z_k = y\}$ . We fix a reference vertex  $v_0 \in V_G$  and take the sphere  $S_k = \{y \in V_G \mid d(v_0, y) = k\}$  centered at the reference vertex  $v_0$  with radius  $k \in \mathbb{N}$  with respect to the graph metric  $d$ .

We consider a divisor  $D = \sum_{x \in V_G} \ell(x)i(x)1_{\{x\}}$  on  $V_G$  satisfying  $\sum_{x \in V_G} |\ell(x)|i(x)1_{\{x\}} < \infty$ . We take an exhaustion sequence  $G_1 \subset G_2 \subset \dots$  of subgraphs of  $G = (V_G, E_G)$  determined by  $V_n = \{a \in V_G \mid d(v_0, a) \leq n\}$ ,  $E_n = \{\{a, b\} \in E_G \mid a, b \in V_n\}$  and  $G_n = (V_n, E_n)$  for each  $n \in \mathbb{N}$ .

We make an attempt to extend the Riemann-Roch theorem on finite graphs to one on an infinite graph by finding such sufficient conditions that sequence  $\{r_n(D)\}$  consisting of so-called dimension of  $D$  on each  $G_n$  converges as  $n$  tends to  $\infty$  for any divisor  $D = \sum_{x \in V_G} \ell(x)i(x)1_{\{x\}}$  with finiteness of its support  $\text{supp}[D] = \{x \in V_G \mid \ell(x) \neq 0\}$ . We will propose several conditions on the infinity of  $G$  for controlling the dimensions of the divisor by closely looking at the Laplacian naturally associated with  $\{C_{x,y}\}$ .

As a result, after redefinitions of the dimension  $r(D)$ , the canonical divisor  $K_G$  and Euler-like characteristic  $\epsilon_{(V,C)}$ , we can assert the same identity as in Theorem as a Riemann-Roch theorem for divisor  $D = \sum_{x \in V_G} \ell(x)i(x)1_{\{x\}}$  on  $V_G$  with  $\sum_{x \in V_G} |\ell(x)|i(x)1_{\{x\}} < \infty$  on an infinite graph satisfying specific conditions.

## References

- [1] M. Baker and S. Norine, Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph, *Advances in Mathematics*, Volume 215, Issue 2, Pages 766-788.

# 定常過程に対する MA ブートストラップ

藤本 智博 (広島大学)  
井上 昭彦 (広島大学)  
清水 亮 (オリックス生命)

$a \in \mathbb{R}^{q \times q}$  に対し,  $\|a\| := \sup_{u \in \mathbb{R}^q, |u|=1} |au|$  をそのスペクトル・ノルムとする.  $q \in \mathbb{N}$  とする. 平均  $\mu_X \in \mathbb{R}^q$  を持つ  $\mathbb{R}^q$ -値の定常過程  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  は MA ( $\infty$ ) 表現

$$X_k - \mu_X = \sum_{j=-\infty}^k \psi_{k-j} \epsilon_j, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

により記述されるとする. ここで  $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$  は  $\mathbb{R}^{q \times q}$ -値の列で, 次を満たすとする: (A1)  $\psi_0 = I_q$ , (A2)  $\sum_{j=0}^{\infty} j \|\psi_j\| < \infty$ , (A3)  $\Psi(z) := \sum_{j=0}^{\infty} z^j \psi_j$  は  $\det \Psi(z) \neq 0$  ( $z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1$ ) を満たす. また, 次も仮定する:

(A4)  $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  は  $\mathbb{R}^q$ -値の IID 確率ベクトル列で,  $E[\|\epsilon_0\|^4] < \infty$ ,  $E[\epsilon_0] = 0$  および  $E[\epsilon_0 \epsilon_0^T] > 0$  を満たす.

$X_1, \dots, X_n$  を  $\{X_t\}$  からの標本とする. 経験自己共分散関数  $\{\hat{\gamma}(j)\}$  を次の様に定義する:

$$\hat{\gamma}(j) := \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-j} (X_{k+j} - \bar{X}_n)(X_k - \bar{X}_n)^T, & j = 0, 1, \dots, n-1, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=-j+1}^n (X_{k+j} - \bar{X}_n)(X_k - \bar{X}_n)^T, & j = -n+1, \dots, -1. \end{cases}$$

ここで  $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  は標本平均を表す.

我々の MA ブートストラップは, 次の 2 つのステップよりなる.

**Step 1.** このステップでは, 標本のサイズ  $n$  が増加するにつれて増加する 次数  $p(n)$  の MA (移動平均) 過程を  $\{X_n\}$  にフィットさせて, ノイズの経験分布を求める.

$1 \ll n$  に対し,  $(\hat{\phi}_{1,n}, \hat{\phi}_{2,n}, \dots, \hat{\phi}_{n,n})$  を次の経験 Yule-Walker 方程式の解とする:

$$\sum_{j=1}^n \hat{\phi}_{j,n} \hat{\gamma}(i-j) = \hat{\gamma}(i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

我々は  $p(n)$  を,  $p(n) \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) および  $p(n) = o(n)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) が成り立つようにとる. 以下, 簡単のため,  $p(n)$  を  $p$  と書く. 次のようにおく:

$$\hat{\psi}_{k,p} := \hat{v}_{k,p} \hat{v}_{0,p}^{-1}, \quad k = 0, \dots, p, \quad (2)$$

$$\hat{v}_{k,p} := \hat{\gamma}(k) - \sum_{j=1}^p \hat{\gamma}(k+j) \hat{\phi}_{j,p}^T, \quad k = 0, \dots, p. \quad (3)$$

まず,  $\epsilon_k = 0$  ( $k = 0, \dots, p-1$ ) とし,

$$\epsilon_k = X_k - \bar{X}_n - \sum_{l=1}^p \hat{\psi}_{l,p} \epsilon_{k-l}$$

から  $\epsilon_k$  ( $k = p+1, \dots, n$ ) を求め,

$$\hat{\epsilon}_{k,p} = \epsilon_k, \quad k = p+1, \dots, n$$

を定める。次に

$$\tilde{\epsilon}_{k,p} := \hat{\epsilon}_{k,p} - \frac{1}{n-p} \sum_{j=p+1}^n \hat{\epsilon}_{j,p}, \quad k = p+1, \dots, n$$

と中心化し,  $\{\tilde{\epsilon}_{k,p}\}_{k=p+1}^n$  の経験分布  $\frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n \delta_{\tilde{\epsilon}_{t,n}}$  の分布関数を  $\hat{F}_{\epsilon,p}$  と表す。

**Step 2.** このステップでは,  $\{X_t\}$  の MA (移動平均) 近似を用いて標本  $X_1, \dots, X_n$  のリサンプリング  $\{X_t^*\}$  を構成する。

$\{\tilde{\epsilon}_{t,n}\}$  のリサンプリング  $\{\epsilon_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$  を

$\{\epsilon_t^*\}$  は IID でかつ各  $\epsilon_t^*$  の分布は  $\hat{F}_{\epsilon,n}$  に従う

ように取る。観測データ  $X_1, \dots, X_n$  のリサンプリング  $\{X_t^*\}_{t \in \mathbb{Z}}$  を, 次の近似移動平均表現に従い構成する:

$$X_t^* = \bar{X}_n + \sum_{j=0}^p \hat{\psi}_{j,p} \epsilon_{t-j}^* \quad (t \in \mathbb{Z}). \quad (4)$$

上の MA ブートストラップの構成は, 標本  $X_1, \dots, X_n$  による条件付確率  $P^*$  を導く。我々は,  $P^*$  に関する量を \* をつけて書く。

次のようにおく:  $\hat{\psi}_{k,p} := 0$ ,  $k \geq p+1$ 。次は [1, Lemma 5.1] の類似物である。

**Lemma 1.** (A1)–(A4) および  $p(n) = O((n/\log n)^{1/4})$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を仮定する。すると次を満たす確率変数  $n_1$  が存在する:

$$\sup_{n \geq n_1} \sum_{j=0}^{\infty} j \|\hat{\psi}_{j,p}\| < \infty \quad \text{almost surely.}$$

次の補題は [1, Lemma 5.2] の類似物である。

**Lemma 2.** (A1)–(A4) および  $p(n) = O((n/\log n)^{1/2})$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を仮定する。すると, 次が成り立つ:

$$\sup_{0 \leq j < \infty} \|\hat{\psi}_{j,p} - \psi_j\| = o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{almost surely.}$$

これらのことから, 上の MA ブートストラップに対しては, [1] の AR ブートストラップの諸結果 (の多次元版) と同様のことが成り立つ。例えば, 次は [1, Lemma 5.5] の類似物である。

**Theorem 3.** (A1)–(A4) および  $p(n) = O((n/\log n)^{1/4})$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を仮定する。すると次が成り立つ:

$$X_k^* \xrightarrow{d^*} X_k \quad \text{in prob.}$$

講演では, シミュレーション結果についても紹介する予定である。

## 参考文献

- [1] BÜHLMANN, P. (1997). Sieve bootstrap for time series. *Bernoulli* **3** 123–148.



# 多変量 ARMA 過程の有限予測係数に対する閉形式表示

井上 昭彦 (広島大学)

Let  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  and  $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  be the unit circle and the closed unit disk, in  $\mathbb{C}$ , respectively. Let  $d \in \mathbb{N}$ . In this talk, a  $d$ -variate ARMA (autoregressive moving-average) process  $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$  is a  $\mathbb{C}^d$ -valued, centered, weakly stationary process with spectral density  $w$  of the form

$$w(e^{i\theta}) = h(e^{i\theta})h(e^{i\theta})^*, \quad \theta \in [-\pi, \pi) \quad (1)$$

with  $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$  satisfying the following condition:

$$\begin{aligned} & \text{the entries of } h(z) \text{ are rational functions in } z \text{ that have} \\ & \text{no poles in } \overline{\mathbb{D}}, \text{ and } \det h(z) \text{ has no zeros in } \overline{\mathbb{D}}. \end{aligned} \quad (C)$$

It is known that there exists  $h_{\#} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$  that satisfies (C) and

$$w(e^{i\theta}) = h(e^{i\theta})h(e^{i\theta})^* = h_{\#}(e^{i\theta})^*h_{\#}(e^{i\theta}), \quad \theta \in [-\pi, \pi), \quad (2)$$

and  $h_{\#}$  is unique up to a constant unitary factor. We may take  $h_{\#} = h$  for the univariate case  $d = 1$  but not so for  $d \geq 2$ , and this is one of the main difficulties when we deal with multivariate processes. Let  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  be the open unit disk in  $\mathbb{C}$ . We can write  $h(z)^{-1}$  in the form

$$h(z)^{-1} = -\rho_0 - \sum_{\mu=1}^K \sum_{j=1}^{m_{\mu}} \frac{1}{(1 - \bar{p}_{\mu}z)^j} \rho_{\mu,j} - \sum_{j=1}^{m_0} z^j \rho_{0,j}, \quad (3)$$

where

$$\begin{cases} K \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ p_{\mu} \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \quad (\mu = 1, \dots, K), \quad p_{\mu} \neq p_{\nu} \quad (\mu \neq \nu), \\ m_{\mu} \in \mathbb{N} \quad (\mu = 1, \dots, K), \quad m_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \rho_{\mu,j} \in \mathbb{C}^{d \times d} \quad (\mu = 0, 1, \dots, K, j = 1, \dots, m_{\mu}), \quad \rho_0 \in \mathbb{C}^{d \times d}, \\ \rho_{\mu,m_{\mu}} \neq 0 \quad (\mu = 0, 1, \dots, K). \end{cases} \quad (4)$$

Here the convention  $\sum_{k=1}^0 = 0$  is adopted in the sums on the right-hand side of (3).

The next theorem shows that  $h_{\#}^{-1}$  of a vector ARMA process has the same  $m_0$  and the same poles with the same multiplicities as  $h^{-1}$ .

**Theorem 1.** For  $m_0, K$  and  $(p_1, m_1), \dots, (p_L, m_L)$  in (3) with (4),  $h_{\#}^{-1}$  has the form

$$h_{\#}(z)^{-1} = -\rho_0^{\#} - \sum_{\mu=1}^K \sum_{j=1}^{m_{\mu}} \frac{1}{(1 - \bar{p}_{\mu}z)^j} \rho_{\mu,j}^{\#} - \sum_{j=1}^{m_0} z^j \rho_{0,j}^{\#}, \quad (5)$$

where

$$\begin{cases} \rho_{\mu,j}^{\#} \in \mathbb{C}^{d \times d} \quad (\mu = 0, 1, \dots, K, j = 1, \dots, m_{\mu}), \quad \rho_0^{\#} \in \mathbb{C}^{d \times d}, \\ \rho_{\mu,m_{\mu}}^{\#} \neq 0 \quad (\mu = 0, 1, \dots, K). \end{cases} \quad (6)$$

We are concerned with the *finite predictor coefficients*  $\phi_{n,j} \in \mathbb{C}^{d \times d}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) of a  $d$ -variate ARMA process  $\{X_k\}$ , defined by

$$P_{[-n,-1]}X_0 = \phi_{n,1}X_{-1} + \dots + \phi_{n,n}X_{-n}, \quad (7)$$

where, for  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{[-n,-1]}X_0$  stands for the best linear predictor of the future value  $X_0$  based on the finite past  $\{X_{-n}, \dots, X_{-1}\}$ .

The next theorem gives a closed-form expression for  $\phi_{n,j}$ .

**Theorem 2.** *Suppose that  $m_\mu = 1$  ( $\mu = 1, \dots, K$ ) and  $m_0 = 0$ . Then, for  $n \geq 1$  and  $j = 1, \dots, n$ , we have*

$$\phi_{n,j} = c_0 a_j + c_0 \mathbf{p}_0^T (I_{dM} - \tilde{G}_n G_n)^{-1} (\Pi_n \Theta)^* \{ \Lambda^T \Pi_n \Theta \Xi_j \rho + \bar{\Xi}_{n-j+1} \tilde{\rho} \}, \quad (8)$$

where  $a_j = \sum_{\mu=1}^K \bar{p}_\mu^j \rho_{\mu,1}$  for  $j \geq 1$ ,  $\mathbf{p}_0^T = (I_d, \dots, I_d) \in \mathbb{C}^{d \times dK}$ ,

$$\Theta = \begin{pmatrix} p_1 h_\#(p_1) \rho_{1,1}^* & & & 0 \\ & p_2 h_\#(p_2) \rho_{2,1}^* & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_K h_\#(p_K) \rho_{K,1}^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dK \times dK},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-p_1 \bar{p}_1} I_d & \frac{1}{1-p_1 \bar{p}_2} I_d & \cdots & \frac{1}{1-p_1 \bar{p}_K} I_d \\ \frac{1}{1-p_2 \bar{p}_1} I_d & \frac{1}{1-p_2 \bar{p}_2} I_d & \cdots & \frac{1}{1-p_2 \bar{p}_K} I_d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{1-p_K \bar{p}_1} I_d & \frac{1}{1-p_K \bar{p}_2} I_d & \cdots & \frac{1}{1-p_K \bar{p}_K} I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dK \times dK},$$

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} p_1^n I_d & & & 0 \\ & p_2^n I_d & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_K^n I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dK \times dK}, \quad n \geq 0,$$

$$\Xi_n = \begin{pmatrix} \frac{\bar{p}_1^n}{1-p_1 \bar{p}_1} I_d & \frac{\bar{p}_2^n}{1-p_1 \bar{p}_2} I_d & \cdots & \frac{\bar{p}_K^n}{1-p_1 \bar{p}_K} I_d \\ \frac{\bar{p}_1^n}{1-p_2 \bar{p}_1} I_d & \frac{\bar{p}_2^n}{1-p_2 \bar{p}_2} I_d & \cdots & \frac{\bar{p}_K^n}{1-p_2 \bar{p}_K} I_d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\bar{p}_1^n}{1-p_K \bar{p}_1} I_d & \frac{\bar{p}_2^n}{1-p_K \bar{p}_2} I_d & \cdots & \frac{\bar{p}_K^n}{1-p_K \bar{p}_K} I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dK \times dK}, \quad n \geq 1,$$

$$\rho = (\rho_{1,1}^T, \rho_{2,1}^T, \dots, \rho_{K,1}^T)^T \in \mathbb{C}^{dK \times d},$$

$$\tilde{\rho} = (\overline{\rho_{1,1}^\#}, \overline{\rho_{2,1}^\#}, \dots, \overline{\rho_{K,1}^\#})^T \in \mathbb{C}^{dK \times d}$$

and  $G_n = \Pi_n \Theta \Lambda$ ,  $\tilde{G}_n = (\Pi_n \Theta)^* \Lambda^T \in \mathbb{C}^{dK \times dK}$ .

The assumptions in Theorem 2 are just for simplicity of presentation. For the general result, see [1].

## 参考文献

- [1] INOUE, A. (2018). Closed-form expression for finite predictor coefficients of vector ARMA processes, <https://arxiv.org/pdf/1805.04820.pdf>

# Percolation と triangle condition

山本 航平 (東北大学)

2018年12月18日

## 1 Percolation

グラフ  $G = (V, E)$  とパラメータ  $p \in [0, 1]$  に対して, 各辺  $e \in E$  に確率  $p$  で open, 確率  $1 - p$  で closed というラベルを付ける. このラベル付けのもと  $(V, \{\text{open edge}\})$  という部分グラフを構成する. このようにして  $G$  の部分グラフからなる集合に確率測度を定めることを percolation という. 本講演ではグラフとして infinite, connected, quasi-transitive を満たすもののみを考える, ここで quasi-transitive とはグラフの自己同型群  $\text{Aut}(G)$  による  $G$  の商が有限集合である. つまりある有限個の頂点  $x_1, \dots, x_n$  が存在して次の等式を満たす.

$$V = \bigcup_{i=1}^n \text{Aut}(G)x_i.$$

このような仮定の任意のグラフ, 任意の  $p$  に対して infinite cluster (connected component) の個数は 確率 1 である定数になり, その定数は  $0, \infty, 1$  の 3 通りしかない [5]. かつ  $p$  に関して単調性を持ちある種の臨界現象が起きる [3]. そこで figure 1 のようにそれぞれの閾値を  $p_c, p_u$  とおき, critical probability, uniqueness threshold と呼ぶ.

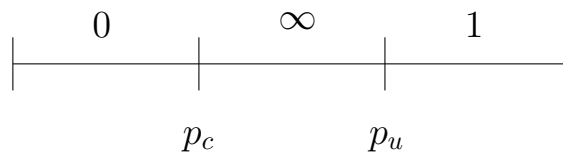


図 1:  $p_c$  and  $p_u$

## 2 Triangle condition

各 2 頂点  $x, y \in V$  に対して,  $\tau_p(x, y)$  を  $x$  と  $y$  が同じ cluster に含まれる確率とする. ある頂点  $o$  を含む cluster の大きさの期待値を  $\chi_p$  と置く. つまり次の等式で表される.

$$\chi_p = \sum_{x \in V} \tau_p(o, x).$$

これは  $p$  に関して単調増加な関数であり  $p_c$  で発散する [1]. この結果は上記の仮定を満たすすべてのグラフに対して成り立つことであるが, グラフが  $d$ -次元単位格子  $\mathbb{Z}^d$  の場合にはもっと早くから分かっていた. Aizenman と Newman [2] は  $\mathbb{Z}^d$  において  $\chi_p$  の漸近挙動を得る十分条件として triangle condition を導入した. グラフ  $G$  が  $p$  で triangle condition を満たすとは,

$$\nabla_p = \sum_{x,y \in V} \tau_p(o,x)\tau_p(x,y)\tau_p(y,o) < \infty$$

が成り立つことである. もし  $p_c$  で triangle condition を満たすならば  $\lim_{p \uparrow p_c} \chi_p(p_c - p) = 1$  が成り立つことが示された. その後  $\mathbb{Z}^d$  で, より一般のグラフで,  $p_c$  で triangle condition を満たすなら  $\circ\circ$  が成り立つ, という趣旨の論文が多く出てきた.

### 3 主結果

グラフとして  $d$ -regular tree と  $\mathbb{Z}$  の直積  $T_d \square \mathbb{Z}$  を考えたとき, 既に Hutchcroft [4] によって  $p_c$  で triangle condition を満たすことは知られている. かつ  $p_c < p_u$  が任意の  $d \geq 3$  で成り立つことも示されている. 主結果はどの範囲まで triangle condition を満たすかについてであり, 次の結果を得た.

$$\nabla_p \begin{cases} < \infty & (p < p_u) \\ = \infty & (p = p_u). \end{cases}$$

### 参考文献

- [1] Aizenman, M.; Barsky, D. J. Sharpness of the phase transition in percolation models. *Comm. Math. Phys.* **108**, no.3, 489–526. (1987).
- [2] Aizenman, M.; Newman, C. M. Tree graph inequalities and critical behavior in percolation models. *J. Statist. Phys.* **36**, no.1-2, 107–143. (1984).
- [3] Häggström, O.; Peres, Y.; Schonmann, R. Percolation on transitive graphs as a coalescent process: relentless merging followed by simultaneous uniqueness. *Perplexing problems in probability*. **44**, 69–90. Birkhäuser Boston. (1999).
- [4] Hutchcroft, T. Non-uniqueness and mean-field criticality for percolation on nonunimodular transitive graphs. *arXiv preprint arXiv:1711.02590*. (2017).
- [5] Newman, C. M.; Schulman, L. S. Infinite clusters in percolation models. *J. Statist. Phys.* **26**, no. 3, 613–628. (1981).

可算マルコフシフトの大偏差原理とその連分数展開への応用

高橋 博樹

Denote by  $X$  the set of all one-sided infinite sequences over the set  $\mathbb{N}$  of positive integers, namely  $X = \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}\}$ , endowed with the product topology of the discrete topology on  $\mathbb{N}$ . Define the left shift  $\sigma : X \rightarrow X$  by  $(\sigma x)_i = x_{i+1}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ). For each  $x \in X$  and  $n \in \mathbb{N}$  define an  $n$ -cylinder by

$$[x_1, \dots, x_n] = \{y = (y_i) \in X : x_i = y_i \text{ for every } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Let  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  be a function. A Borel probability measure  $\mu_\phi$  on  $X$  is *Bowen's Gibbs measure for the potential  $\phi$*  [1, 4, 5] if there exist constants  $c_0 > 0$ ,  $c_1 > 0$  and  $P \in \mathbb{R}$  such that for every  $x \in X$  and every  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$c_0 \leq \frac{\mu_\phi[x_1, \dots, x_n]}{\exp\left(-Pn + \sum_{i=0}^{n-1} \phi(\sigma^i(x))\right)} \leq c_1.$$

Let  $\mathcal{M}$  denote the space of Borel probability measures on  $X$  endowed with the weak\*-topology. We are concerned with the following three sequences  $\{\Delta_n\}$ ,  $\{\Xi_n\}$ ,  $\{\Upsilon_{y,n}\}$  of Borel probability measures on  $\mathcal{M}$ :

For each  $x \in X$  and  $n \in \mathbb{N}$  define  $\delta_x^n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{\sigma^i x}$ , with  $\delta_{\sigma^i x}$  the unit point mass at  $\sigma^i x$ . Denote by  $\Delta_n$  the distribution of the  $\mathcal{M}$ -valued random variable  $x \mapsto \delta_x^n$  on the probability space  $(X, \mu_\phi)$ ;

For each integer  $n \in \mathbb{N}$  define

$$\begin{aligned} \Xi_n &= \left( \sum_{x \in \text{Per}_n \sigma} \exp S_n \phi(x) \right)^{-1} \sum_{x \in \text{Per}_n \sigma} \exp S_n \phi(x) \delta_{\delta_x^n}, \\ \Upsilon_{y,n} &= \left( \sum_{x \in \sigma^{-n} y} \exp S_n \phi(x) \right)^{-1} \sum_{x \in \sigma^{-n} y} \exp S_n \phi(x) \delta_{\delta_x^n}, \end{aligned}$$

where  $\text{Per}_n \sigma = \{x \in X : \sigma^n x = x\}$ ,  $\sigma^{-n} y = \{x \in X : \sigma^n x = y\}$  and  $y \in X$  is fixed.

**Theorem A.** ([6, Theorem A]). *Let  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  be a measurable function and  $\mu_\phi$  a Bowen's Gibbs measure for the potential  $\phi$ . Then  $\{\Delta_n\}$ ,  $\{\Xi_n\}$ ,  $\{\Upsilon_{y,n}\}$  are exponentially tight and satisfy the Large Deviation Principle with the same convex good rate function  $I$ . All their weak\*-limit points are supported on subsets of the set  $I^{-1}(0)$ .*

Under the hypotheses and notation of Theorem A, we call  $\nu \in \mathcal{M}$  a *minimizer* if  $I(\nu) = 0$ . We give a sufficient condition for the uniqueness of minimizer. For a function  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  put

$$P(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x_1 \dots x_n} \sup_{[x_1, \dots, x_n]} \exp \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^i,$$

where the sum runs over all  $n$ -cylinders. For  $\gamma \in (0, 1]$  we introduce a metric  $d_\gamma$  on  $X$  by setting  $d_\gamma(x, y) = \exp(-\gamma \inf\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i\})$ , with the convention  $e^{-\infty} = 0$ . A function  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  is *Hölder continuous* if there exist  $C > 0$  and  $\gamma \in (0, 1]$  such that for every  $k \in \mathbb{N}$  and all  $x, y \in [k]$ ,  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C d_\gamma(x, y)$ .

**Theorem B.** *Let  $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$  be a Hölder continuous function such that  $\beta_\infty := \inf\{\beta \in \mathbb{R}: P(\beta\phi) < \infty\} < 1$ . Then there exists a unique shift-invariant Bowen's Gibbs measure for the potential  $\phi$ . It is the unique equilibrium state for  $\phi$ , i.e., the unique measure which attains the supremum*

$$\sup \left\{ h(\nu) + \int \phi d\nu : \nu \in \mathcal{M} \text{ is shift-invariant and } \int \phi d\nu > -\infty \right\}$$

( $h(\nu)$  being the entropy of  $\nu$  with respect to  $\sigma$ ), and it is the unique minimizer of the rate function  $I$  in Theorem A. The  $\{\Delta_n\}$ ,  $\{\Xi_n\}$ ,  $\{\Upsilon_{y,n}\}$  converge in the weak\*-topology to the unit point mass at the minimizer.

We apply Theorem B to the Gauss map  $G: (0, 1] \rightarrow [0, 1)$  given by  $G(x) = 1/x - [1/x]$ . For  $x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ , define  $(a_i(x))_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  by  $a_i(x) = \left\lfloor \frac{1}{G^{i-1}(x)} \right\rfloor$ , and put

$$[a_1(x); a_2(x); \cdots; a_n(x)] = \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \cdots + \frac{1}{a_n(x)}}}.$$

Then  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_1(x); a_2(x); \cdots; a_n(x)]$ . The map  $\pi: x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q} \rightarrow (a_i(x))_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  is a homeomorphism, and commutes with  $G$  and the left shift. Hence, the study of the behavior of  $a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots$  translates to that of the dynamics of  $G$ .

Define  $\phi := -\log |DG| \circ \pi^{-1}$ . Then  $\beta_\infty = 1/2$  [3]. For each  $\beta > 1/2$  the potential  $\beta\phi$  satisfies the conditions in Theorem B. Denote by  $\mu_\beta$  the  $G$ -invariant Borel probability measure which corresponds to the unique shift-invariant Bowen's Gibbs measure for the potential  $\beta\phi$ .

**Corollary.** (Equidistribution of weighted periodic points). *For every  $\beta > 1/2$  the following convergence in the weak\*-topology holds:*

$$\frac{1}{\sum_{x \in \text{Per}_n(G)} |DG^n(x)|^{-\beta}} \sum_{x \in \text{Per}_n(G)} |DG^n(x)|^{-\beta} \delta_x^n \longrightarrow \mu_\beta \quad (n \rightarrow \infty).$$

The convergence for  $\beta = 1$  was first proved in [2] by directly showing the tightness of the sequence of measures. The  $\mu_1$  is the Gauss measure:  $d\mu_1 = \frac{1}{\log 2} \frac{dx}{1+x}$ .

## REFERENCES

- [1] Bowen, R.: *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Springer lecture notes in Mathematics. Springer (1975)
- [2] Fiebig, D., Fiebig, U.-R., Yuri, M.: Pressure and equilibrium states for countable state Markov shifts. *Israel J. Math.* **131**, 221–257 (2002)
- [3] Mayer, D.H.: On the thermodynamic formalism for the Gauss transformation. *Commun. Math. Phys.* **130**, 311–333 (1990)
- [4] Mauldin, R.D., Urbański, M.: Gibbs states on the symbolic space over infinite alphabet. *Israel J. Math.* **125**, 93–130 (2001)
- [5] Sarig, O.: Thermodynamic formalism for countable Markov shifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **19**, 1565–1593 (1999)
- [6] Takahasi, H.: Large deviation principles for countable Markov shifts. preprint 29 pages

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KEIO UNIVERSITY, YOKOHAMA, 223-8522, JAPAN

*E-mail address:* hiroki@math.keio.ac.jp

*URL:* <http://www.math.keio.ac.jp/~hiroki/>

# Resolution of sigma-fields for multiparticle finite-state evolution with infinite past

Yu ITO (Kyoto Sangyo University)  
Toru SERA (Kyoto University)  
Kouji YANO (Kyoto University)

Let us consider the stochastic recursive equation

$$X_k = N_k X_{k-1} \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

with the *observation process*  $X = \{X_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  taking values in a set  $V$  and with the *noise process*  $N = \{N_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  doing in a composition semigroup  $\Sigma$  consisting of mappings from  $V$  to itself, where we write  $fv$  simply for the evaluation  $f(v)$ . For a given probability law on  $\Sigma$ , we call the pair  $\{X, N\}$  a  $\mu$ -*evolution* if the equation (1) holds and each  $N_k$  has law  $\mu$  and is independent of  $\mathcal{F}_{k-1}^{X, N} := \sigma(X_j, N_j : j \leq k-1)$ . Our problem here is to resolve the observation  $\mathcal{F}_k^X = \sigma(X_j : j \leq k)$  into three independent components as

$$\mathcal{F}_k^X = \mathcal{F}_k^Y \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X \vee \sigma(U_k) \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

where, for each  $k$ , the first component  $\mathcal{F}_k^Y$  is a sub- $\sigma$ -field of the noise  $\mathcal{F}_k^N$ , the second  $\mathcal{F}_{-\infty}^X := \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_k^X$  is the remote past, and the third  $U_k$  is a random variable which is independent of  $\mathcal{F}_k^Y \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X$ . For  $\sigma$ -fields  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$  we write  $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \vee \dots$  for  $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots)$ .

If we assume that the product  $N_j N_{j+1} \dots N_k$  converges  $\mathbb{P}$ -a.s. as  $j \rightarrow -\infty$  to some random mapping  $\tilde{N}_k$  and that  $X_j$  does to some random variable  $X_{-\infty}$ , then we obtain

$$\mathcal{F}_k^X \subset \mathcal{F}_k^{\tilde{N}} \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

with  $\mathcal{F}_{-\infty}^X = \sigma(X_{-\infty})$ ,  $\mathbb{P}$ -a.s. We notice that, in typical cases, these a.s. convergences fail but the resolution (2) holds with the third random variable  $U_k$  being uniform in some sense.

Motivated by Tsirelson's example [2] of a stochastic differential equation without strong solutions, Yor [7] studied this problem in the case  $V = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , the one-dimensional torus, and  $\Sigma = \mathbb{T}$  by identifying  $z \in \mathbb{T}$  with the multiplication mapping  $w \mapsto zw$ . By means of the Fourier series and the martingale convergence theorems, he obtained a complete answer to the resolution problem. Akahori–Uenishi–Yano [1] and Hirayama–Yano [3] generalized Yor's results to compact groups; see also Yano–Yor [6] for a survey on this topic.

We now consider the resolution problem when the state space is a finite set  $V = \{1, 2, \dots, \#V\}$  and  $\Sigma = \text{Map}(V)$  is the finite composition semigroup of all mappings from  $V$  to itself. In Yano [5] we gave a partial answer in the sense that the inclusion

$$\mathcal{F}_k^X \subset \mathcal{F}_k^N \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

holds if and only if  $\text{Supp}(\mu)$  is *sync*, i.e., the image  $g(V)$  is a singleton for some  $g \in \langle \text{Supp}(\mu) \rangle$ , where  $\langle \text{Supp}(\mu) \rangle$  denotes the subsemigroup of  $\Sigma$  consisting of all finite compositions from  $\text{Supp}(\mu)$ . Unfortunately, we have not so far obtained a general result nor a counterexample for the resolution of the form (2).

We thus focus on the resolution problem for multiparticle evolutions. For a probability law  $\mu$  and for  $m \in \mathbb{N}$ , we mean by an  $m$ -particle  $\mu$ -evolution the pair  $\{\mathbb{X}, N\}$  of a  $V^m$ -valued process  $\mathbb{X} = \{\mathbb{X}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  with  $\mathbb{X}_k = (X_k^1, \dots, X_k^m)$  and a  $\Sigma$ -valued process  $N = \{N_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  such that the stochastic recursive equation

$$X_k^i = N_k X_{k-1}^i \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z} \text{ and } i = 1, \dots, m \quad (5)$$

holds and each  $N_k$  has law  $\mu$  and is independent of  $\mathcal{F}_{k-1}^{\mathbb{X}, N}$ . Choosing

$$m = \inf\{\#g(V) : g \in \langle \text{Supp}(\mu) \rangle\}, \quad (6)$$

we shall give a complete answer to the resolution problem of the form

$$\mathcal{F}_k^{\mathbb{X}} = \mathcal{F}_k^Y \vee \mathcal{F}_{-\infty}^{\mathbb{X}} \vee \sigma(U_k) \quad \mathbb{P}\text{-a.s. for } k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

For this purpose, we utilize the *Rees decomposition* from the algebraic semigroup theory, which has played a fundamental role in the theory of infinite products of random variables taking values in topological semigroups; see, e.g., [4] for the details.

## References

- [1] J. Akahori, C. Uenishi, and K. Yano. Stochastic equations on compact groups in discrete negative time. *Probab. Theory Related Fields*, 140(3-4):569–593, 2008.
- [2] B. S. Cirel'son. An example of a stochastic differential equation that has no strong solution. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 20(2):427–430, 1975.
- [3] T. Hirayama and K. Yano. Extremal solutions for stochastic equations indexed by negative integers and taking values in compact groups. *Stochastic Process. Appl.*, 120(8):1404–1423, 2010.
- [4] G. Högnäs and A. Mukherjea. *Probability measures on semigroups*. Probability and its Applications (New York). Springer, New York, second edition, 2011. Convolution products, random walks, and random matrices.
- [5] K. Yano. Random walk in a finite directed graph subject to a road coloring. *J. Theoret. Probab.*, 26(1):259–283, 2013.
- [6] K. Yano and M. Yor. Around Tsirelson's equation, or: The evolution process may not explain everything. *Probab. Surv.*, 12:1–12, 2015.
- [7] M. Yor. Tsirel'son's equation in discrete time. *Probab. Theory Related Fields*, 91(2):135–152, 1992.



# Fréchet 空間上の quasi-regular non-local Dirichlet forms の定式化と、その $\Phi_3^4$ 場の確率量子化への応用

Sergio ALBEVERIO<sup>\*</sup>, and Minoru W. YOSHIDA<sup>†</sup>

平成30年12月5日

## 1 概要

Denote by  $S$  the Banach spaces of weighted real  $l^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , spaces and the space of direct product  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (with  $\mathbb{R}$  and resp.  $\mathbb{N}$  the spaces of real numbers and resp. natural numbers), which are understood as Fréchet spaces. Let  $\mu$  be a Borel probability measure on  $S$ . On the real  $L^2(S; \mu)$  space, for each  $0 < \alpha < 2$ , we give an explicit formulation of  $\alpha$ -stable type (cf., e.g., section 5 of [Fukushima,Uemura 2012] for corresponding formula on  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $d < \infty$ ) non-local quasi-regular (cf. section IV-3 of [M,R 92]) Dirichlet form  $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{E}_\alpha))$  (with a domain  $\mathcal{D}(\mathcal{E}_\alpha)$ ), and show an existence of  $S$ -valued Hunt processes properly associated to  $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{E}_\alpha))$ .

As an application of the above general results, we consider the problem of stochastic quantization of Euclidean free field,  $\Phi_2^4$  and  $\Phi_3^4$  fields, i.e., field with (self) interaction of 4-th power. By using the property that, for example, the support of the Euclidean  $\Phi_3^4$  field measure  $\mu$  is in some real Hilbert space  $\mathcal{H}_{-3}$ , which is a sub space of the Schwartz space of real tempered distributions  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R})$ , we define an isometric isomorphism  $\tau_{-3} : \mathcal{H}_{-3} \rightarrow$  "some weighted  $l^2$  space". By making use of  $\tau_{-3}$ , we then interpret the above general theorems formulated on the abstract  $L^2(S; \mu)$  space to the Euclidean  $\Phi_3^4$  field,  $L^2(\mathcal{H}_{-3}; \mu)$ , and for each  $0 < \alpha \leq 1$  we show the existence of an  $\mathcal{H}_{-3}$ -valued Hunt process  $(Y_t)_{t \geq 0}$  the invariant measure of which is  $\mu$ .

$(Y_t)_{t \geq 0}$  is understood as a stochastic quantization of Euclidean  $\Phi_3^4$  field realized by a Hunt process through the non-local Dirichlet form  $(\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{D}(\mathcal{E}_\alpha))$  for  $0 < \alpha \leq 1$ .

---

<sup>\*</sup>Inst. Angewandte Mathematik, and HCM, Univ. Bonn, Germany, email :albeverio@iam.uni-bonn.de

<sup>†</sup>Dept. Information Systems Kanagawa Univ., Yokohama, Japan, email: washizuminoru@hotmail.com

1) As far as we know, there has been no explicit proposal of general formulation of *non-local* quasi-regular Dirichlet form on infinite dimensional topological vector spaces ( for the local case, i.e., the case where the associated Markov processes are (continuous) diffusions, much have been developed and known), which admits interpretations to Dirichlet forms on several concrete random fields on several Fréchet spaces.

2) Though there have been derived several results on the existence of (continuous) diffusions (i.e., roughly speaking, which associated to quadratic forms and generators of local type) corresponding with stochastic quantizations of  $\Phi_2^4$  or  $\Phi_3^4$  Euclidean fields (cf., the quotation given below), as far as we know, there exists no explicit corresponding consideration for *non-local* type Markov processes, which is performed through the Dirichlet form argument.

Hence, the present result is a first development that gives answers to the above mentioned open problems 1) and 2).

## 参考文献

- [A,H-K 77] Albeverio, S., Høegh-Krohn, R., Dirichlet forms and diffusion processes on rigged Hilbert spaces. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* **40** (1977), 1-57.
- [A,R 98] Albeverio, S., Röckner, M., Classical Dirichlet forms on topological vector spaces—the construction of the associated diffusion processes, *Probab. Theory Related Fields* **83** (1989), 405-434.
- [Brydges,Fröhlich,Sokal 83] Brydges, D., Fröhlich, J., Sokal, A., A New proof of the existence and non triviality of the continuum  $\varphi_2^4$  and  $\varphi_3^4$  quantum field theories, *Commn. Math. Phys.* **91** (1983), 141-186.
- [Fukushima 80] Fukushima, M., *Dirichlet forms and Markov processes*, North-Holland Mathematical Library, **23**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.
- [F,Uemura 2012] Fukushima, M., Uemura, T., Jump-type Hunt processes generated by lower bounded semi- Dirichlet forms, *Ann. Probab.* **40** (2012), 858-889
- [M,R 92] Ma, Z. M., Röckner, M., *Introduction to the theory of (Non-Symmetric) Dirichlet Forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Z,Z 2018] Zhu, R., Zhu, X., Lattice approximation to the dynamical  $\Phi_3^4$  model, *Ann. Probab.* **46** (2018), 397-455.

# 正則基底に関して Ogawa 可積分な乱関数の SFC による同定

星野 浄生 (大阪府立大学)\*

## 1. 序

乱関数が確率 Fourier 係数(SFC)で同定されるか, という問題が論じられてきた. 特に SFC が Ogawa 積分で与えられた場合において, [5], [1], [6] で先行結果がある. [5], [1] では, 有界変動乱関数の重複対数の法則を用いた SFC からの再構成, [6] では, 適当な複素数値乱関数の cross variation を用いた再構成が示されている. 本講演では, 正則 CONS に関して Ogawa 可積分な乱関数の cross variation を用いた再構成を与える.

## 2. 設定

$(B_t)_{t \in [0,1]}$  を filter 付確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}, P)$  上の Brown 運動,  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  を  $L^2([0,1]; \mathbb{C})$  の CONS で各  $e_n$  の実部, 虚部は有界変動であるとする.  $L^2([0,1]; \mathbb{R})$  の CONS  $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  は,  $\sup_{M \in \mathbb{N}} \left| \sum_{m=1}^M \varphi_m \int_0^1 \varphi_m(s) ds \right|_{L^2[0,1]} < \infty$  を満たすとき正則であるという.  $L^2([0,1]; \mathbb{R})$  の正則 CONS に関する Ogawa 積分 (正則 Ogawa 積分), Itô 積分, 可微分指数  $r$  の  $i$ -parameter 2 乗可積分 Wiener 汎関数の Sobolev 空間, Skorokhod 積分をそれぞれ  $\int_0^1 d_* B$ ,  $\int_0^1 dB$ ,  $\mathcal{L}_i^{r,2}$ ,  $\int_0^1 \delta B$  と表す ([2] の Definition 2.1,2.3,2.4 を参照).  $X, Y : [0,1] \rightarrow L^0(\Omega)$  の  $t$  での cross variation が存在するとき, それを  $\langle X, Y \rangle_t$  と表し, quadratic variation  $\langle X, X \rangle_t$  が存在するとき, それを  $[X]_t$  と表す.

$a \in L^0([0,1] \times \Omega; \mathbb{C}), b \in L^0(\Omega; L^2([0,1]; \mathbb{C}))$  に対して以下を定義する.

**定義 1 (正則 Ogawa 型 SFC)** 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し,  $\overline{e_n} a$  は正則 Ogawa 積分可能であるとする. 正則 Ogawa 型確率微分  $d_* Y_t = a(t) d_* B_t + b(t) dt$ ,  $t \in [0,1]$  の  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  に関する確率 Fourier 係数 (正則 Ogawa 型 SFC, 或いは, SFC-O $_*$ )  $(e_n, d_* Y)$  を次式で定義する:

$$(e_n, d_* Y) := \int_0^1 \overline{e_n(t)} d_* Y_t = \int_0^1 \overline{e_n(t)} a(t) d_* B_t + \int_0^1 \overline{e_n(t)} b(t) dt.$$

特に,  $b = 0$  のとき,  $(e_n, d_* Y) = (e_n, a d_* B)$  を  $a(t)$  の SFC-O $_*$  ともいう.

## 3. 乱関数の正則 Ogawa 型 SFC による再構成

まず, 以下の乱関数の族 ( $L^0([0,1] \times \Omega)$  の部分集合) を定義する:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{A \in L^0([0,1] \times \Omega) \mid \text{Re } A, \text{Im } A \text{ は 有界変動 a.s. } \}, \\ \mathcal{M} &= \left\{ \int_0^\cdot f dB \mid f \in L^0(\Omega; L^2[0,1]), f \text{ は } (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]} \text{-発展的可測} \right\}, \\ \mathcal{W} &= \left\{ \int_0^\cdot f \delta B \mid f \in \mathcal{L}_1^{2,2} \right\} + \text{span} \left\{ T_K f \mid f \in \mathcal{L}_1^{1,2}, \sup_{t \in [0,1]} |K(t, \cdot)|_{L^2[0,1]} < \infty \right\}, \end{aligned}$$

但し,  $f \in \mathcal{L}_1^{1,2}$ ,  $K \in L^2([0,1]^2)$  に対し,  $T_K f(t) := \int_0^1 K(t, s) f(s) ds$ . また,  $\mathcal{A}, \mathcal{W}$  の元は非因果的であることを注意する.  $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \mathcal{M} + \mathcal{W}$  とおく.

\*e-mail: su301032@edu.osakafu-u.ac.jp

**命題 1**  $a \in \mathcal{L}$  とするとき, 以下が成り立つ:

- (1) 任意の有界変動関数  $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  に対し,  $va$  は正則 Ogawa 積分可能である.
- (2) 0 に  $L^2$ -収束する任意の有界変動関数列  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  に対し,  $\text{l.i.p.} \int_0^1 v_n a d_\varphi B = 0$ . 特に,

$$\mathcal{P}((e_n, d_* Y))_{n \in \mathbb{N}}(t) := \text{l.i.p.} \sum_{N \rightarrow \infty} \int_0^t e_n(s) ds \quad (e_n, d_* Y) = Y_t, \quad \forall t \in [0, 1],$$

ここで,  $d_* Y_t = a(t) d_* B_t + b(t) dt$ ,  $t \in [0, 1]$ .

次に,  $\mathcal{P}$  と cross variation  $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$  により SFC-O $_*$  で同定される乱関数の全体として  $\mathcal{L}_{\text{PC}}^{e,*}$  を次で定める:

$$\mathcal{L}_{\text{PC}}^{e,*} = \left\{ a \in L^0([0, 1] \times \Omega) \mid \mathcal{P}((e_n, a d_* B))_{n \in \mathbb{N}} = \int_0^\cdot a d_* B, \right. \\ \left. \forall s, t \in [0, 1] \left[ \int_0^\cdot a d_* B \right]_t = \int_0^t |a(u)|^2 du, \left\langle \int_0^\cdot a d_* B, B_{\cdot \wedge s} \right\rangle_t = \int_0^{t \wedge s} a(u) du \right\}.$$

**命題 2**  $\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{W} \subset \mathcal{L}_{\text{PC}}^{e,*}$ .

**定理 1**  $\mathcal{L}_{\text{PC}}^{e,*}$  は線形空間となる.

**系 1**  $a(t)$  は  $\text{Re } a, \text{Im } a \in \mathcal{L}_{\text{PC}}^{e,*}$  を満たすとする. このとき,  $d_* Y_t = a(t) d_* B_t + b(t) dt$ ,  $t \in [0, 1]$  とすると以下が成り立つ:

- (1)  $a(t)$  は  $((e_n, d_* Y))_{n \in \mathbb{N}}$  で  $a(t) = \frac{d}{dt} \langle \mathcal{P}((e_n, d_* Y))_{n \in \mathbb{N}}, B \rangle_t$  により同定される.
- (2)  $|\text{Re } a|, |\text{Im } a|, \text{Re } a \text{Im } a, (\text{sgn } a) a^\dagger$  は  $((e_n, d_* Y))_{n \in \mathbb{N}}$  で  $Y_t = \mathcal{P}((e_n, d_* Y))_{n \in \mathbb{N}}$  と性質:  $\forall f, g \in \mathcal{L}_{\text{PC}}^{e,*} \int_0^t f(s) \overline{g(s)} ds = \langle \int_0^\cdot f d_* B, \int_0^\cdot g d_* B \rangle_t$  により同定される.

**注 1** (2) における同定には  $(B_t)_{t \in [0, 1]}$  を必要としない.

**注 2**  $((e_n, d_* Y))_{n \in \mathbb{N}}$  から有限個の SFC  $(e_n, d_* Y)$  が欠落していても (1), (2) は成り立つ.

**注 3**  $a(t)$  が同定されるので  $b$  も  $((e_n, d_* Y))_{n \in \mathbb{N}}$  で同定される.

**注 4**  $a \in \mathcal{L}$  であれば,  $a(t)$  は系 1 の仮定を満たす.

## 参考文献

- [1] K. Hoshino, Identification of finite variation processes from the SFC. MSJ Autumn Meeting, abstract (2017)
- [2] K. Hoshino, T. Kazumi, On the Ogawa integrability of noncausal Wiener functionals, to appear, Stochastics (2018)
- [3] D. Nualart, E. Pardoux, Stochastic calculus with anticipating integrands. Probab. Th. Rel. Fields, 78, pp.535-581 (1988)
- [4] S. Ogawa, The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals. Japan J. Appl. Math. 2, 229-240 (1985)
- [5] S. Ogawa, H. Uemura, On the identification of noncausal functions from the SFCs. RIMS Kôkyûroku. 1952, 128-134 (2015-06)
- [6] S. Ogawa, H. Uemura, On the reconstruction of random function from its SFCs defined by an arbitrary CONS. Symposium on Probability Theory, abstract (2017)

---

$\dagger \text{sgn } z = 1$  if  $0 \leq \arg z < \pi$ ,  $\text{sgn } z = -1$  o/w,  $z \in \mathbb{C}$  ( $\arg 0 := 0$ ).

# レヴィ市場におけるデジタルオプションに対する局所的リスク 最小化問題について

鈴木良一

慶應義塾大学理工学部数理科学科

email: r\_suzuki@z3.keio.jp

website: <https://sites.google.com/site/ryoichisuzukifinance/>

December 19, 2018.

Locally risk-minimizing (LRM) is a well-known hedging method for contingent claims in a quadratic way (see e.g., [2] and [3]). By using Malliavin calculus, we can obtain explicit representations of LRM for incomplete market models whose asset price process is described by a solution to a stochastic differential equation (SDE) driven by a Lévy process ([1]).

On the other hand, there is one important derivative security describe by indicator function called digital option. A digital option pays a fixed cash amount if some condition is realized. Mathematical representation of digital (or binary) options are given by

$$\mathbf{1}_{[K,\infty)}(S_T) = \begin{cases} 1 & \text{for } S_T \geq K, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where  $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$  is a stock price process and  $K > 0$  is a constant number that is fixed by the contract. It is popular and important derivative security. Therefore, to study digital options, we consider Malliavin differentiability of indicator functions ([4]).

In this talk, we first consider Malliavin differentiability of indicator functions on canonical Lévy spaces. By using it, we obtain explicit representations of LRM for digital options in markets driven by Lévy processes.

## References

- [1] T. Arai and R. Suzuki. Local risk-minimization for Lévy markets. *International Journal of Financial Engineering*. **vol.2** (2015), no. 2, 1550015, 28 pp.
- [2] M. Schweizer. A guided tour through quadratic hedging approaches. *Handbooks in Mathematical Finance: Option Pricing, Interest Rates and Risk Management*. Cambridge University Press, 538–574, 2001.
- [3] M. Schweizer. Local risk-minimization for multidimensional assets and payment streams. *Banach Center Publications*. **83** (2008), 213–229.
- [4] R. Suzuki. Malliavin differentiability of indicator functions on canonical Lévy spaces. *Statistics and Probability Letters*. **137** (2018), 183–190.

## FBSDES の解とニュートン法について

土屋貴裕（会津大学），田口大（大阪大学）

Forward-backward stochastic differential equations (FBSDEs)

$$(1) \quad \begin{cases} X(t) = X(0) + \int_0^t b(s, \omega, \Theta(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, \omega, \Theta(s)) dW(s), \\ Y(t) = \varphi(X(T)) + \int_t^T f(s, \omega, \Theta(s)) ds - \int_t^T Z(s) dW(s), \end{cases}$$

を満たす三組  $\Theta \equiv (X, Y, Z) \equiv (X(t), Y(t), Z(t))_{t \in [0, T]}$  は  $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$  に値を取るとする． $W$  は  $d$ -次元の Wiener 過程， $b, f, \sigma$ ，そして  $\varphi$  は可測な関数であり，一般にランダムであっても良い．この FBSDEs (1) はいわゆる終端条件  $Y(T) = \varphi(X(T))$  があるため Stochastic differential equations (SDEs) とはかなり様相が異なる．その解の存在と一意性について次のようなアプローチがある，例えば [8] や [4] を参考にすると

**Contraction mapping:** 局所的，すなわち小さい  $T > 0$  のみで解が構築できる．

**The Four Step scheme:** 大域的であるがマルコフ型のみ有効．

**The method of continuation:** マルコフ型を過程しないが “monotonicity” 条件がいる．

本講演では  $(X, Y, Z)$  を近似列  $(X_n, Y_n, Z_n)$  を Newton 法のアナロジーで構成する： $\varphi, b, f, \sigma$  に適当な滑らかさを仮定して，

$$(2) \quad \begin{aligned} X_{n+1}(t) &= X_{n+1}(0) + \int_0^t b_n(s, \omega, \Theta_{n+1}(s)) ds + \int_0^t \sigma_n(s, \omega, \Theta_{n+1}(s)) dW(s), \\ Y_{n+1}(t) &= \varphi_n(X_{n+1}(T)) + \int_t^T f_n(s, \omega, \Theta_{n+1}(s)) ds - \int_t^T Z_{n+1}(s) dW(s). \end{aligned}$$

ここで， $\varphi_n(x) = \varphi(X_n(T)) + \nabla_x \varphi(X_n(T))(x - X_n(T))$ ， $x \in \mathbb{R}^l$  であり，係数  $b_n, \sigma_n, f_n$  は (1) の状態変数  $\theta = (x, y, z) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d}$  に関して 1 次近似したものとする：

$$b_n(s, \omega, \theta) = b(s, \omega, \Theta_n(s)) + \nabla_{\theta} b(s, \omega, \Theta_n(s))(\theta - \Theta_n(s)), \quad (s, \omega, \theta) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times d},$$

同様に  $\sigma_n, f_n$  も定義する．

すると線形な係数  $b_n, \sigma_n, f_n$  であるから三組  $\Theta_n \equiv (X_n, Y_n, Z_n) \equiv (X_n(t), Y_n(t), Z_n(t))_{t \in [0, T]}$  を定義できそうに思えるが，一般に well-defined でない．それどころか FBSDEs (1) は係数が線形かつ有界，さらに一次元であっても大域的には解の一意性が崩れ，しかも上記の既存の方法のいずれも適応できない，[4]．

そこで論文 [6] では特に  $X$ （の拡散係数）は  $(Y, Z)$  に関係しない decoupled FBSDEs,

$$(3) \quad \begin{cases} X(t) = X(0) + \int_0^t b(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dW(s), \\ Y(t) = \varphi(X(T)) + \int_t^T f(s, X(s), Y(s), Z(s)) ds - \int_t^T Z(s) dW(s). \end{cases}$$

のときに次を示した．

**Theorem 1** ([6]).  $b, \sigma, f, \varphi$  は微分可能，微分係数は  $(s, \omega)$ -a.e. で一様に有界，さらに

$$\mathbb{E} \left( |X(0)|^2 + \int_0^T |b(s, \omega, 0)|^2 + |\sigma(s, \omega, 0)|^2 + |f(s, \omega, 0, 0, 0)|^2 ds \right) < \infty,$$

とする。このとき、*decoupled FBSDEs* (3) の解が存在し、 $T$  と係数  $b, \sigma, f$  の微分で定まる定数  $C > 0$  が存在する： $X_0(0) = X(0)$  を満たす任意の初期値  $(X_0, Y_0, Z_0) \in \mathbb{S}_I^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{H}^2$  に対して

$$\|(X - X_{n+1}, Y - Y_{n+1}, Z - Z_{n+1})\| \leq C2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

通常のニュートン近似の収束は有限次元であっても関数の凸性 [5, page 453], もしくは初期値を解に十分に近く取る条件を仮定する [2, Theorem XVI]. 実際に Vidossich は (応用分野で常微分方程式の解の効率的な近似方法として用いられていた) Chaplygin 近似は無有限次元 Banach 空間のニュートン法であることを見抜き, その大域的な収束を [7, Theorem (1.3)] で与えた. さらに SDEs においてニュートン法の収束が [3] で示された. ただし, それらは (局所的な一次もしくは単に) 収束は示しているが大域的に一次収束することまでは得られていなかった.

本研究の貢献は *decoupled FBSDEs* におけるニュートン法の大域的な一次収束である. 鍵となるのは Forward  $X$  については天野氏 [1] による Gronwall 不等式型の評価であり, Backward  $(Y, Z)$  については重み付きノルムを考えることにある. ここで必要な表記について一部, 記載する. 終端時間を  $T > 0$  とする.  $m \in \mathbb{N}$  に対して

$$\mathbb{S}_m^2 = \left\{ Y : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ continuous, adapted} : \|Y\|_{\mathbb{S}_m^2} = \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} |Y(s)|^2 \right] < \infty \right\},$$

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ Z : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ adapted} : \|Z\|_{\mathbb{H}^2} = \mathbb{E} \left[ \int_0^T |Z(s)|^2 ds \right] < \infty \right\},$$

各々の Banach 空間  $\mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{H}^2$ ,  $\mathbb{S}_I^2$  は

$$\|(Y, Z)\|^2 = \|Y\|_{\mathbb{S}_m^2}^2 + \|Z\|_{\mathbb{H}^2}^2, \quad \|X\|^2 = \|X\|_{\mathbb{S}_I^2}^2.$$

また  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対し, 重み付きノルムは

$$\|(Y, Z)\|_\alpha^2 = \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq s \leq T} e^{\alpha s} |Y(s)|^2 \right] + \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{\alpha s} |Z(s)|^2 ds \right].$$

さらに Kantorovitch 定理を援用することで十分大きい  $n \in \mathbb{N}$  では二次収束することを述べる. また論文 [6] では証明はできたものの, 凸性を仮定していない (ように見えた) が大域的な収束が導かれるのか不鮮明であった. 本講演ではその点をできる限り整理して解説する.

## REFERENCES

1. Kazuo Amano, *A note on Newton's method for stochastic differential equations and its error estimate.*, Proc. Japan Acad., Ser. A **85** (2009), no. 3, 19–21.
2. L Kantorovitch, *The method of successive approximations for functional equations*, Acta Math. **71** (1939), 63–97.
3. Shigetoku Kawabata and Toshio Yamada, *On Newton's method for stochastic differential equations*, Séminaire de probabilités de Strasbourg, Lecture Notes in Math., vol. 1485, Springer, Berlin, 1991, pp. 121–137.
4. Jin Ma, Zhen Wu, Detao Zhang, and Jianfeng Zhang, *On well-posedness of forward-backward SDEs – a unified approach.*, Ann. Appl. Probab. **25** (2015), no. 4, 2168–2214.
5. J M Ortega and W C Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Classics in Applied Mathematics, vol. 30, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.
6. Dai Taguchi and Takahiro Tsuchiya, *Newton-Kantorovitch method for decoupled forward-backward stochastic differential equations*, (2018).
7. Giovanni Vidossich, *Chaplygin's method is Newton's method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **66** (1978), no. 1, 188–206.
8. Jianfeng Zhang, *Backward stochastic differential equations. From linear to fully nonlinear theory.*, New York, NY: Springer, 2017.

このファイルは QR コードを読む込事で利用できます。



**CONSERVATIVENESS AND FELLER PROPERTY OF  
DIFFUSION PROCESSES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS  
WITH  $m$ -BAKRY-ÉMERY RICCI TENSOR FOR  $m \leq 1$**

桑江一洋 (K. Kuwae) 福岡大学理学部

1. LAPLACIAN の比較定理

この講演では中国科学院の Xiang-Dong Li 氏との Laplacian の比較定理に関する共同研究 [5] に基づき、氏と北京師範大学の Songzi Li 氏との共同研究 [6] について報告する。  $(M, g)$  を完備で滑らかな境界のないリーマン多様体とする。  $\phi \in C^2(M)$  を固定する。  $C_0^\infty(M)$  上の作用素  $L$  を  $L := \Delta - \langle \nabla \phi, \nabla \cdot \rangle$  で定めると、これは  $\mu := e^{-\phi} \text{vol}_g$  について対称になる。すなわち  $\int_M (-Lf)g d\mu = \int_M \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\mu =: \mathcal{E}(f, g)$  が  $f, g \in C_0^\infty(M)$  で成立する。  $L$  を Witten Laplacian あるいは重み付き Laplacian と呼ぶ。ディリクレ形式  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  を  $(\mathcal{E}, C_0^\infty(M))$  の  $L^2(M; \mu)$  上の最小閉拡張とし、  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  に対応する拡散過程を  $\mathbf{X} = (\Omega, X_t, \mathbf{P}_x)$  とおく。  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  の  $L^2(M; \mu)$ -半群は連続な熱核を許容することが知られている ( $\phi \in C^\infty(M)$  のときは [3, 7.5] を参照)。  $m \in ]-\infty, +\infty[$  に対して  $m$ -Bakry-Émery リッチテンソル  $\text{Ric}_{m,n}(L)$  を

$$\text{Ric}_{m,n}(L)(x) := \text{Ric}(x) + \text{Hess } \phi(x) - \frac{\nabla \phi(x) \otimes \nabla \phi(x)}{m-n}$$

で定める。  $M$  上の関数  $K$  に対して  $\text{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq K(x)$ ,  $x \in M$  が成立するとき曲率次元条件  $\text{CD}(K, m)$  が成立すると呼ぶ。  $m = n$  のときは  $\phi$  は定数と規約する。この場合は  $\text{Ric}_{m,n}(L)(x) = \text{Ric}(x)$  となる。  $m \geq n$  で  $K$  が定数なら  $(M, d_g, \mu)$  の  $\text{RCD}(K, m)$ -条件と同値になる。本講演では  $m \leq 1$  の場合に重み付き Laplacian  $L$  の比較定理 ([5]) に基づいて  $\mathbf{X}$  の保存性と Feller 性への変形されたやや強い判定条件を与える。  $r_p(x) := d_g(x, p)$  を距離関数とする。以下の比較定理は  $m = 1$  で  $\kappa$  が定数の場合に [9] で最初に証明された。

**定理 1.1** (Laplacian の比較定理 [5], cf. [9]).  $x, p \in M$ ,  $m \leq 1$  とする。 $\text{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq (n-m)\kappa(s_p(x))e^{-\frac{4\phi(x)}{n-m}}$  なら  $Lr_p(x) \leq (n-m)\cot_\kappa(s_p(x))e^{-\frac{2\phi(x)}{n-m}}$  が  $s_p(x) < \delta_\kappa$  で成立する。ここで  $\kappa$  は  $[0, +\infty[$  上の連続関数で、  $s_p(x)$  は

$$s_p(x) = \inf \left\{ \int_0^{r_p(x)} e^{-\frac{2\phi(\gamma_t)}{n-m}} dt \mid \gamma \text{ は単位速度測地線で } \gamma_0 = p, \gamma_{r_p(x)} = x \right\}$$

で与えられる。  $\cot_\kappa$  は初期条件  $\lim_{s \rightarrow 0} s \cot_\kappa(s) = 1$  をみたす Riccati 方程式

$$(1.1) \quad -\frac{d \cot_\kappa}{ds}(s) = \kappa(s) + \cot_\kappa(s)^2,$$

の  $[0, \delta_\kappa[$  上の解で  $\delta_\kappa$  はその爆発時刻である。  $\kappa \leq 0$  なら  $\delta_\kappa = +\infty$  となる。  $\delta_\kappa < \infty$  なら末期条件  $\lim_{s \rightarrow \delta_\kappa} (\delta_\kappa - s) \cot_\kappa(s) = 1$  も満たされる。  $\kappa$  が定数のときは  $\kappa \leq 0$  の場合も込めて  $\cot_\kappa(s) = \sqrt{\kappa} \cos(\sqrt{\kappa}s) / \sin(\sqrt{\kappa}s)$ ,  $\delta_\kappa = \pi / \sqrt{\kappa_+}$  となる。



## 2. 主結果

$\phi_p(r) := \inf_{B_r(p)} \phi$  とする。K を  $[0, +\infty[$  上の非負連続な非減少関数で以下の (K) という条件を満たすとする:

$$(K) : \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{K \left( e^{-\frac{2\phi_p(r)}{n-m}} r \right) e^{-\frac{2\phi_p(r)}{n-m}}}} = +\infty \quad \text{for some } r_0 > 0.$$

条件 (K) は  $p \in M$  には依存しない。

定理 2.1 (X の保存性).  $p \in M$  を固定する。条件 (K) を仮定し

$$(2.1) \quad \text{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq -K(s_p(x))e^{-\frac{4\phi(x)}{n-m}} \quad \text{for any } x \in M$$

が  $m \in ]-\infty, 1]$  で成立するとする。このとき X は保存的である。

定理 2.2 (X の Feller 性). 条件 (K) を仮定し

$$(2.2) \quad \text{Ric}_{m,n}(L)(z) \geq -K(s_q(z))e^{-\frac{4\phi(z)}{n-m}} \quad \text{for any } z, q \in M$$

が  $m \in ]-\infty, 1]$  で成立するとする。このとき X は Feller 性をもつ。

定理 2.1 の証明は Grigor'yan [2] の保存性の判定条件に帰着される。また定理 2.2 の証明は Azencott [1] の Feller 性の判定条件に帰着される ([4] に通常の Laplacian の場合での証明がある)。 $m \geq n$  の場合の Laplacian の比較定理は  $\text{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq (m-1)\kappa(r_p(x))$  なら  $Lr_p(x) \leq (m-1)\cot_{\kappa}(r_p(x))$ ,  $r_p(x) < \delta_{\kappa}$  の形のため、X の保存性や Feller 性は (K) よりも弱い条件である

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{K(r)}} = +\infty \quad \text{for some } r_0 > 0$$

で成立することが知られている ([8, Theorems 1.4 and 1.5])

## REFERENCES

- [1] R. Azencott, *Behavior of diffusion semi-groups at infinity*, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 193–240.
- [2] A. Grigor'yan, *On stochastically complete manifolds*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **290** (1986), 534–537.
- [3] A. Grigor'yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **47**. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009.
- [4] E. P. Hsu, *Stochastic analysis on manifolds*, Graduate Studies in Mathematics, **38**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [5] K. Kuwae and X.-D. Li, *Laplacian comparison theorem on Riemannian manifolds with  $CD(K, m)$ -condition for  $m \leq 1$* , preprint, 2018.
- [6] K. Kuwae, S.-Z. Li and X.-D. Li, *Conservativeness and Feller property of diffusion processes on Riemannian manifolds with  $m$ -Bakry-Émery Ricci tensor for  $m \leq 1$* , 2018, preprint.
- [7] K. Kuwae, S.-Z. Li and X.-D. Li, *Liouville theorems and Harnack inequalities on Riemannian manifolds with  $CD(K, m)$ -condition for  $m < 1$* , 2018, in prepration.
- [8] X.-D. Li, *Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds*, J. Math. Pures Appl. (9) **84** (2005), no. 10, 1295–1361.
- [9] W. Wylie and D. Yeroshkin, *On the geometry of Riemannian manifolds with density*, preprint, 2016.

# Geometry of the random walk range conditioned on survival among Bernoulli obstacles

福島 竜輝<sup>1</sup>

京都大学数理解析研究所

Jian Ding (University of Pennsylvania), Rongfeng Sun (National University of Singapore), Changji Xu (University of Chicago) との共同研究

格子  $\mathbb{Z}^d$  上に Bernoulli 分布する障害物を避けながらランダムウォークする粒子を考える。粒子と媒質の両方について平均をとると (annealed という<sup>2</sup>) 粒子は出発点を含む球状の領域に局在することが知られている。本研究ではこの粒子の軌跡が局在している球を埋め尽くすことを示し、さらに軌跡の境界の大きさに関する評価を得たので報告する。

$(\omega, \mathbb{P}_p)$  を  $\mathbb{Z}^d$  上の独立同分布 Bernoulli( $1-p$ ) 確率変数,  $(\{S_n\}_{n \geq 0}, P_0)$  を原点を出発点とする  $d$  次元ランダムウォークとする。  $\omega = (\omega_x)_{x \in \mathbb{Z}^d}$  に対して *obstacles* を  $\mathcal{O}(\omega) := \{x \in \mathbb{Z}^d : \omega_x = 1\}$  で定め、ランダムウォークの到達時刻を  $\tau_{\mathcal{O}}$  と書くことにする。粒子の挙動を記述するのは条件付き確率

$$\mu_N(\cdot) := \mathbb{P}_p \otimes P_0(\cdot \mid \tau_{\mathcal{O}(\omega)} > N)$$

であり、*annealed path measure* と呼ばれる。

以下  $d \geq 2$  とする。次が冒頭に述べた局在現象である。

**Confinement property.** (Sznitman [6], Bolthausen [2] for  $d = 2$ , Povel [5] for  $d \geq 3$ )  $d \geq 2$ ,  $p \in (0, 1)$  に対して  $\varrho_0(d, p) > 0$ ,  $x_N(\omega) \in \mathbb{Z}^d$  が存在して、任意の  $\epsilon > 0$  に対して次が成り立つ：

$$\mu_N \left( S_{[0, N]} \subset B(x_N(\omega), (\varrho_0 + \epsilon)N^{\frac{1}{d+2}}) \right) \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty. \quad (\text{confinement})$$

講演者は [4] において  $S_{[0, N]}$  が  $B(\omega)$  をほとんど埋め尽くしていることを示した：

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mu_N \left( \left| N^{-\frac{d}{d+2}} |S_{[0, N]}| - |B(0, \varrho_0)| \right| > \epsilon \right) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

今回報告する一つ目の結果は、「ほとんど」を「境界の近くを除いて全て」に改善するものである。これは [2] で予想として述べられていたものである。

**Theorem 1.** *Confinement property* と同じ  $x_N$  と任意の  $\epsilon > 0$  に対して、

$$\mu_N \left( S_{[0, N]} \supset B(x_N(\omega), (\varrho_0 - \epsilon)N^{\frac{1}{d+2}}) \right) \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty. \quad (\text{covering})$$

**Remark.** この定理に関しては最近 Berestycki–Cerf [1] が同じ結果を発表した。ただしそこでの問題の定式化は障害物を使わないもので、従って証明の方法も異なっている。例えば我々の議論は (confinement) を (おそらく必要ないものの現時点では) 仮定しているが、彼らは (covering) を独立に示す。実は Bolthausen の論文 [2] は、(covering) から (confinement) を導く構成になっており、[1] はその方針を  $d \geq 3$  でも完遂しようとしている。

<sup>1</sup>E-mail: ryoki@kurims.kyoto-u.ac.jp

<sup>2</sup>これに対して媒質は固定した場合を quenched という。

上の (confinement) と (covering) によりランダムウォークの軌跡は漸近的に (中身の詰まった) 球であることが分かる. 二つ目の結果は軌跡の表面積が  $\log N$  の冪の因子を除いて  $B(x_N(\omega), \varrho_0 N^{\frac{1}{d+2}})$  の表面積と一致することを示すものである.

**Theorem 2.** ある  $a > 0$  が存在して

$$\mu_N \left( |\partial S_{[0,N]}| \leq N^{\frac{d-1}{d+2}} (\log N)^a \right) \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty.$$

界面の揺らぎの問題として見るならば, 表面積より  $\partial S_{[0,N]}$  と  $\partial B(x_N(\omega), \varrho_0 N^{\frac{1}{d+2}})$  の Hausdorff 距離などを考察する方が自然であるが, それははるかに難しい問題のように思われる.

最後に技術的な側面について少し言及しておく. このモデルの研究は1990年代に Sznitman が「障害物の拡大」と呼ばれる多重スケール解析によってランダム作用素の固有値を評価する方法でかなり進展させた. この方法は実際の適用に際して確率論的な考察を伴うことが多いものの, 原理的には解析的なものである. 一方で今回の結果を導くために用いた手法はその本質において組合せ論的であり, この種の問題の研究としては目新しいところがあると思われるので, 講演ではできるだけそこに焦点を当てたい.

## References

- [1] N. Berestycki and R. Cerf. The random walk penalised by its range in dimensions  $d \geq 3$ . arXiv:1811.04700.
- [2] E. Bolthausen. Localization of a two-dimensional random walk with an attractive path interaction. *Ann. Probab.* 22, 875–918, 1994.
- [3] J. Ding, R. Fukushima, R. Sun and C. Xu. Geometry of the random walk range conditioned on survival among Bernoulli obstacles. arXiv:1806.08319
- [4] R. Fukushima. Asymptotics for the Wiener sausage among Poissonian obstacles. *J. Stat. Phys.* 133, 639–657, 2008.
- [5] T. Povel. Confinement of Brownian motion among Poissonian obstacles in  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ . *Probab. Theory Related Fields* 114, 177–205, 1999.
- [6] A.-S. Sznitman. On the confinement property of two-dimensional Brownian motion among Poissonian obstacles. *Comm. Pure Appl. Math.* 44, 1137–1170, 1991.

# A limit theorem for persistence diagrams of random complexes built over marked point processes <sup>\*1</sup>

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 学術研究員 須崎 清剛<sup>\*2</sup>

ある現象を観測して得られたデータの多くは、Euclid 空間内の有限集合として表現される。いま、初期時刻でデータが入力され、時刻  $t$  で各データ点を中心とする半径  $t$  の閉球を与える。すなわち、時間とともに各データ点を太らせていく過程を考える。この過程は、データ集合を様々な解像度で解析していると思えることもできる。各時刻で閉球の和とホモトピー同値な脈体を対応させたとき、単体複体の増大列が得られるが、横軸を発生 (birth) 時刻、縦軸を消滅 (death) 時刻として、その増大列中の  $q$  次ホモロジー類の発生・消滅を  $\Delta = \{(x, y) \in [0, \infty]^2 : 0 \leq x < y \leq \infty\}$  上にプロットした図は、 $q$  次パーシステンス図と呼ばれる。

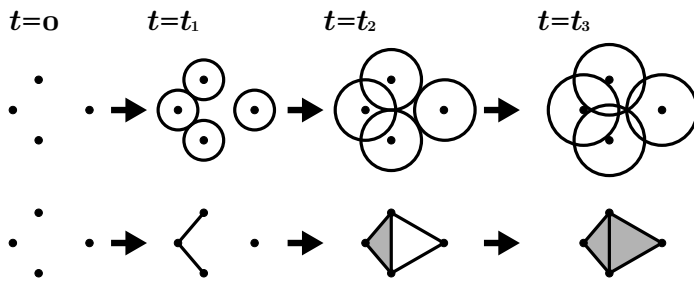


図1 下部は閉球の和の脈体 (Čech 複体)

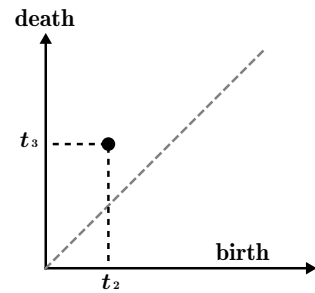


図2 1次パーシステンス図

本講演では、マーク付き点過程に対してある規則で単体複体の増大列を対応させた際のパーシステンス図について考える。本研究は、九州大学の白井朋之氏との共同研究に基づく。

集合  $S$  に対して  $\mathcal{F}(S)$  を  $S$  の非空の有限部分集合全体とし、 $\mathbb{M}$  を Polish 空間とする。  $\kappa : \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}) \rightarrow [0, \infty]$  は次の条件 (K1), (K2) をみたすとする。

(K1)  $A \subset B$  ならば  $\kappa(A) \leq \kappa(B)$ .

(K2) 単調非減少な  $\rho : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  が存在して、 $t < \infty$  ならば  $\rho(t) < \infty$  をみたし、すべての  $(x, m), (y, n) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$  に対して、 $|x - y| \leq \rho(\kappa(\{(x, m), (y, n)\}))$  が成立する。

また、場合によって  $\kappa$  には以下の平行移動・回転不変性を仮定する。

(T) すべての  $x \in \mathbb{R}^d$  に対して、 $\kappa(T_x A) = \kappa(A)$  が成り立つ。ここで、 $T_x : \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$  は  $T_x A = \{(y + x, m) : (y, m) \in A\}$  である。

(R) すべての  $U \in O(d)$  に対して、 $\kappa(R_U A) = \kappa(A)$  が成り立つ。ここで、 $O(d)$  は  $d$  次直交行列全体、 $R_U : \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$  は  $R_U A = \{(Ux, m) : (x, m) \in A\}$  である。

$\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  を標準射影とする。  $\tilde{\Xi} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$  が単純であるとは、 $\pi|_{\tilde{\Xi}}$  が単射となることをいい、このとき  $\Xi = \pi(\tilde{\Xi})$  と表す。単純な  $\tilde{\Xi} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$  に対しては、 $\pi$  により自然な全単射  $\mathcal{F}(\tilde{\Xi}) \ni \tilde{\sigma} \mapsto \sigma \in \mathcal{F}(\Xi)$  が誘導され、各  $\tilde{\sigma} = \{(x_0, m_0), (x_1, m_1), \dots, (x_q, m_q)\}$  は、 $\mathbb{R}^d$  内の有限点配置  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_q\}$  にマーク  $\{m_0, m_1, \dots, m_q\}$  が付加されていると見なせる。単純な  $\tilde{\Xi} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$  が与えられたとき、抽象単体複体の増大列  $\mathbb{K}(\tilde{\Xi}) = \{K(\tilde{\Xi}, t)\}_{t \geq 0}$  を

$$K(\tilde{\Xi}, t) = \{\sigma \subset \Xi : \kappa(\tilde{\sigma}) \leq t\}$$

<sup>\*1</sup> 本研究は、JST CREST JPMJCR15D3 の支援を受けたものである。

<sup>\*2</sup> k-suzaki@imi.kyushu-u.ac.jp

で定める. すなわち  $\kappa(\tilde{\sigma})$  は,  $\mathbb{K}(\tilde{\Xi})$  における単体  $\sigma$  の発生時刻である.  $\mathbb{K}(\tilde{\Xi})$  を  $\kappa$ -フィルトレーションと呼ぶ.  $\kappa$  の基本的な例については, 講演中に述べる.

非負整数  $q$  に対して,  $H_q(K(\tilde{\Xi}, t))$  を体上の  $K(\tilde{\Xi}, t)$  の  $q$  次ホモロジー群とし,  $r \leq s$  に対して,  $\iota_r^s : H_q(K(\tilde{\Xi}, r)) \rightarrow H_q(K(\tilde{\Xi}, s))$  を包含写像  $K(\tilde{\Xi}, r) \hookrightarrow K(\tilde{\Xi}, s)$  から誘導される線形写像とする.  $H_q(\mathbb{K}(\tilde{\Xi})) = (\{H_q(K(\tilde{\Xi}, t))\}_{t \geq 0}, \{\iota_r^s\}_{r \leq s})$  は,  $q$  次パーシステントホモロジー群と呼ばれる. 単項イデアル整域上の次数付き加群の構造定理により,  $H_q(\mathbb{K}(\tilde{\Xi}))$  は区間分解

$$H_q(\mathbb{K}(\tilde{\Xi})) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_q} I(b_i, d_i)$$

をもつことが知られている ([2]). ここで  $I(b_i, d_i)$  は, ある  $q$  次ホモロジー類が  $\mathbb{K}(\tilde{\Xi})$  において  $t = b_i$  で発生し,  $b_i \leq t < d_i$  間で持続し,  $t = d_i$  で消滅することを表している. 多重集合  $D_q(\tilde{\Xi}) = \{(b_i, d_i) \in \Delta : i = 1, 2, \dots, n_q\}$  を  $q$  次パーシステンス図という. 我々は  $D_q(\tilde{\Xi})$  を数え上げ測度

$$\xi_q(\tilde{\Xi}) = \sum_{(b_i, d_i) \in D_q(\tilde{\Xi})} \delta_{(b_i, d_i)}$$

と同一視し, パーシステンス図の収束を Radon 測度の漠収束で考える.

$\tilde{\Phi}$  は  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$  上の点過程であって,  $\mathbb{R}^d$  へ射影した点過程  $\Phi(\cdot) = \tilde{\Phi}(\cdot \times \mathbb{M})$  が  $\mathbb{R}^d$  上の単純点過程となるとき,  $\mathbb{M}$  をマーク空間とする  $\mathbb{R}^d$  上のマーク付き点過程であるという. 作用  $\{T_x\}_{x \in \mathbb{R}^d}$  と  $\{R_U\}_{U \in O(d)}$  は,  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$  上の配置空間へ自然な作用を与えるが,  $\tilde{\Phi}$  に対する定常性とエルゴード性, および等方性は, これら作用に関するものとして定義される. また,  $\Phi$  が全有限モーメントをもつとは,  $\mathbb{R}^d$  の任意の有界な Borel 可測集合  $A$  と  $p \geq 1$  に対して,  $\mathbb{E}[\Phi(A)^p] < \infty$  が成り立つときをいう. 各  $L > 0$  に対して,  $\Lambda_L = [-L/2, L/2]^d \times \mathbb{M}$  とおく.  $\tilde{\Phi}$  から定まるランダムな  $\kappa$ -フィルトレーション  $\mathbb{K}(\tilde{\Phi}|_{\Lambda_L}) = \{K(\tilde{\Phi}|_{\Lambda_L}, t)\}_{t \geq 0}$  に対応する  $q$  次パーシステンス図  $\xi_q(\tilde{\Phi}|_{\Lambda_L})$  を, 簡単に  $\xi_{q,L}$  と表す. 多次元エルゴード定理を応用して, 次のことを示すことができる.

**定理 1.**  $\kappa$  は (T) をみたし,  $\tilde{\Phi}$  は定常マーク付き点過程で, その  $\mathbb{R}^d$  への射影点過程  $\Phi$  は全有限モーメントをもつと仮定する. このとき各  $q \geq 0$  に対して,  $\Delta$  上の Radon 測度  $\nu_q$  が存在して,  $L \rightarrow \infty$  のとき  $\mathbb{E}[\xi_{q,L}]/L^d \xrightarrow{v} \nu_q$  が成立する. ここで  $\xrightarrow{v}$  は漠収束を表す. さらに  $\kappa$  は (R) をみたし,  $\tilde{\Phi}$  がエルゴード的で等方的であれば, ほとんど確実に  $L \rightarrow \infty$  のとき

$$\frac{1}{L^d} \xi_{q,L} \xrightarrow{v} \nu_q$$

が成立する.

証明は, 点過程のパーシステンス図の極限定理について論じている [1] で用いられている手法を, マーク付き点過程版へ拡張して行う.

## 参考文献

- [1] Y. Hiraoka, T. Shirai and K. D. Trinh, *Limit theorems for persistence diagrams*, Ann. Appl. Probab. **28** (2018) 2740–2780.
- [2] A. Zomorodian and G. Carlsson, *Computing persistent homology*, Discrete Comput. Geom. **33** (2005) 249–274.

# Fluctuation results in First-passage percolation

中島秀太\* 京都大学 数理解析研究所 博士後期課程 3年

キーワード: First-passage percolation, optimization problem, random environment

First-passage percolation は Hammersley と Welsh により 1965 年に導入された動的な浸透モデルである。モデルは次のように定義される。隣接している  $\mathbb{Z}^d$  の二点をつなぐ辺の全体を  $E(\mathbb{Z}^d)$  で表す。各辺  $e \in E(\mathbb{Z}^d)$  には、その辺を通過するのに必要な時間を表す独立で同一分布に従う非負確率変数  $\tau_e$  が与えられているとする。また、 $\mathbb{Z}^d$  の辺を  $e_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_k$  の順にたどる路  $\pi$  の移動時間を  $t(\pi) = \sum_{i=1}^k \tau_{e_i}$  で定義する。さらに二点  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  間の最小移動時間を次で定義する:

$$T(x, y) := \inf\{t(\pi) : \pi \text{ は } x \text{ から } y \text{ への路}\}.$$

物理的には  $\tau_e$  は  $e$  の浸透に要する時間、 $T(0, x)$  は液体の浸透領域が  $x$  に到達するまでの時間、 $B(t) = \{x \in \mathbb{R}^d | T(0, [x]) \leq t\}$  は時刻  $t$  での浸透領域を表す。

本講演では浸透領域  $B(t)$  の揺らぎの大きさについて議論する。

**Definition 1.** 次を満たす時、 $\tau$  の分布が適切であると言う:

$$\mathbb{P}(\tau_e = \underline{\tau}) < \begin{cases} p_c(d) & \text{if } \underline{\tau} = 0, \\ \bar{p}_c(d) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ここで  $\underline{\tau}$  は  $\tau_e$  の分布の *support* の下限、 $p_c(d), \bar{p}_c(d)$  はそれぞれ  $d$  次元 *percolation* モデル、 $d$  次元 *oriented percolation* モデルの臨界確率である。

次に浸透領域  $B(t)$  の揺らぎの大きさを定義する。

**Definition 2.** 任意の  $l > 0$  と任意の集合  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  について、

$$\Gamma_l^- = \{v \in \Gamma | d(v, \Gamma^c) \geq l\} \text{ and } \Gamma_l^+ = \{v \in \mathbb{R}^d | d(v, \Gamma) \leq l\},$$

と定める。ここで  $d$  はユークリッド距離。与えられた集合  $A, B \subset \mathbb{R}^d$  に対して、 $B$  に対する  $A$  の揺らぎの大きさを次で定義する:

$$F(A, B) = \inf\{\delta > 0 | B_\delta^- \subset A \subset B_\delta^+\}.$$

**Theorem 1.**  $F$  が適切で指数モーメント有限であるとする。このときある  $c, C > 0$  が存在して任意の  $t > 0$  と任意の原点を含む凸集合  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  について、次が成り立つ。

$$\mathbb{P}(F(B(t), \Gamma) \leq c \log t) \leq C \exp(-t^c).$$

本講演では研究の背景や動機を説明するとともに、証明で用いるアイデアについても議論する予定である。

## 参考文献

- [1] Shuta Nakajima Divergence of shape fluctuation for general distributions in first passage percolation arXiv:1706.03493.

# 確率幾何的表現を用いた量子 Ising 模型の平均場臨 界現象の解析

上島芳倫 \*

共同研究者：半田悟氏（北海道大学），坂井哲氏（北海道大学）

鉄 (Fe) は常温で強い磁場を印加すると磁石になるが， $770^{\circ}\text{C}$  でその性質が失われる。このような強磁性体の相転移を記述するモデルの一つに Ising 模型がある。古典 Ising 模型は， $d$  次元格子  $\mathbb{Z}^d$  上のスピン配置  $\sigma: \mathbb{Z}^d \rightarrow \{-1, +1\}$  が確率的に実現されるとするモデルである。この模型に対する相転移・臨界現象については [4] に詳しい。

一方で，量子力学的には，スピンは作用素によって表されるべき対象である。具体的には，古典系のスピン配置  $\{\sigma_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$  を Pauli 行列で置き換え，横磁場を印加する。このように扱うことで，例えば，絶対零度でも横磁場を変化させるによって相転移が起きるなど，古典系には無かった興味深い性質が現れる。ところで，量子 Ising 模型は格子空間に連続な時間軸を加えた“時空間の Ising 模型”（スピンは古典的）と対応することが知られており，その時空間上の確率幾何的表現を用いて種々の相関不等式が得られている [2, 3]。

講演者らは特に，量子効果を加えたとき，平均場的な振る舞いが古典系からどの程度ずれるかということに関心がある。量子 Ising 模型における平均場臨界現象の数学的な解析は Bjönberg [1] によって行われているが，その論文では温度パラメータを固定した状況で相互作用係数や横磁場を変化させたときの応答について示されている。古典系からのずれという観点からは，相互作用係数や横磁場を固定した状況で温度を変化させたときの応答を調べたい。

本講演ではこの温度変化に対する応答という問題について現在までに得られた結果を紹介する。それに際しては， $d$  次元量子 Ising 模型は極限の意味で  $d + 1$  次元古典 Ising 模型と等価であること [5] に基づき，時空間ではなく古典系での確率幾何的表現のみを用いた。モデルの詳しい定義や定理の内容については，講演の中で述べる。

---

\* 北海道大学大学院理学院数学専攻 E-mail: kamijima@math.sci.hokudai.ac.jp

## 参考文献

- [1] J.E. Björnberg. Infrared bound and mean-field behaviour in the quantum Ising model. *Commun. Math. Phys.* **323** (2013): 329–366.
- [2] J.E. Björnberg and G.R. Grimmett. The phase transition of the quantum Ising model is sharp. *J. Stat. Phys.* **136** (2009): 231–273.
- [3] N. Crawford, D. Ioffe. Random current representation for transverse field Ising model. *Commun. Math. Phys.* **296** (2010): 447–474.
- [4] 田崎晴明, 原隆『相転移と臨界現象の数理』(共立出版株式会社, 2015年)
- [5] M. Suzuki. Relationship between  $d$ -Dimensional Quantal Spin Systems and  $(d + 1)$ -Dimensional Ising Systems: Equivalence, Critical Exponents and Systematic Approximants of the Partition Function and Spin Correlations. *PTP.* **56** (1976): 1454–1469.



# RECOVERING MODELLED DISTRIBUTIONS FROM PARACONTROLLED CALCULUS

MASATO HOSHINO

Many singular SPDEs have motivations from statistical physics, quantum field theory, etc., but they are sometimes ill-posed without “renormalizations”. The theory of *paracontrolled calculus* by Gubinelli, Imkeller and Perkowski made it possible to show the local well-posedness results for such renormalized SPDEs. Compared with the famous theory of *regularity structures* by Hairer, the PC theory has an advantage in showing detailed properties (global well-posedness, ergodicity, etc.) but it is not algebraically sophisticated. Our ultimate goal is to show the equivalence of RS and PC and construct a new theory which has both advantages of RS and PC.

One of the main differences between the two theories is in the definition of solutions. In PC, solutions are written by using the Bony’s paraproduct. In RS, solutions are described based on local estimates. Therefore in order to get the relationship between these concepts, we need local estimates of Bony’s paraproduct.

This talk consists of the following three steps.

- (1) (Analytical step) We consider local behaviors of the nonlocal operators

$$(\dots((f^1 \otimes f^2) \otimes f^3) \dots \otimes f^{n-1}) \otimes f^n.$$

For the simplicity, we consider slightly simpler operators.

- (2) (Algebraic step) We construct the Hopf algebra which represent the structure appearing in (1).
- (3) Some applications: multiplicative SDEs with singular noises, iterated commutators, parilinearization, etc.

This talk is based on a joint work with Ismaël Bailleul.

FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY

*E-mail address:* hoshino@math.kyushu-u.ac.jp

# Nelson 拡散過程と非線形 Schrödinger 方程式 ( Nelson Diffusions and Nonlinear Schrödinger equations)

名和 範人 (Hayato NAWA), 明治大学 理工学部 数学科

## 1. 非線形 Schrödinger 方程式

次の擬共型不変な非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題について考える：

$$\begin{cases} 2i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + |\psi|^{4/d} \psi = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ \psi(0) = \psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

ここで、 $H^1(\mathbb{R}^d)$  は 1 階の超関数微分までが自乗可積分であるような関数のクラス、通常 Sobolev 空間を表す。この初期値問題の局所適切性はよく知られた古典的な事実で、 $\|\nabla \psi_0\|$  のみに依存する最大延長時間  $T_{\max} \in (0, \infty]$  があって、 $\psi \in C([0, T_{\max}); H^1(\mathbb{R}^d))$  なる一意解を持ち、次の「ビーム強度 (または粒子数)」、 「ハミルトニアン (またはエネルギー)」と呼ばれる量が保存則する [7]:

$$\|\psi(t)\| := \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(x, t)|^2 dx \right)^{1/2} = \|\psi_0\|, \quad \mathcal{H}(\psi(t)) := \|\nabla \psi(t)\|^2 - \frac{2}{2 + \frac{4}{d}} \|\psi(t)\|_{2 + \frac{4}{d}}^{2 + \frac{4}{d}} = \mathcal{H}(\psi_0).$$

上式では次の記号を用いた：関数  $f$  に対して  $\|f\|_p := \left( \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ .

我々の初期値問題は様々な解を持つが、特に興味があるのが爆発解である。爆発 (blowup) とは、

$$0 < T_{\max} < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|\nabla \psi(t)\| = \infty$$

となることを言う。擬共型不変な非線形 Schrödinger 方程式は  $d = 2$  のとき、非線形媒質中伝播するレーザービームの自己集束モデル (Kerr 効果) として現れ (例えば [2])、解の爆発はビームの集束を表現していると考えられる (この場合の時間軸は実際の時間ではなく、ビームの進行方向に平行な空間の第 3 軸となっている)。我々は、この爆発解の爆発スピードに興味がある。

## 2. Nelson 拡散過程

量子力学の基礎方程式である Schrödinger 方程式の初期値問題の解に対して、量子力学と同じ予言を与える確率過程 (Nelson 拡散過程 [5]) を構成することができた [1]。非線形 Schrödinger 方程式に対しても、同様な確率過程を構成できる：経路の空間  $C([0, T_{\max}), \mathbb{R}^d)$  上に “確率変数”

$$\begin{array}{ccc} X_t : C([0, T_{\max}), \mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ \cup & & \cup \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(t) =: X_t(\gamma). \end{array}$$

を導入すると、 $C([0, T_{\max}), \mathbb{R}^d)$  の上に

$$P[X_t \in dx] = \frac{|\psi(x, t)|^2 dx}{\|\psi_0\|^2}.$$

なる確率測度  $P$  が存在して、 $P$  は、次の汎関数  $B_t$  が Brown 運動になるようなものとして特徴付けられる：

$$B_t \stackrel{def}{=} X_t - X_0 - \int_0^t b(X_\tau, \tau) d\tau.$$

ドリフト項  $b$  は Schrödinger 方程式の解から、 $\psi \neq 0$  のとき  $b := (\Im + \Re) \frac{\nabla \psi}{\psi}$ 、 $\psi = 0$  のときは  $b := 0$  と定義されている。

### 3. Brown 運動の重対数法則と爆発スピード

我々の爆発解は,  $\{|\psi(x, t)|^2 dx\}_{0 < t < T_{\max}}$  が tight であれば,

$$|\psi(x, t)|^2 dx \rightarrow \sum_{j=1}^N A_j \delta_{a^j}(dx) + \mu(dx) \quad \text{as } t \rightarrow T_{\max}$$

と振る舞うことがわかっている [4]. ここで,  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) は, ある“閾値”  $\mathcal{N}_0$  より大きな正数,  $\delta_{a^j}(dx)$  は  $\mathbb{R}^d$  内の点  $a^j$  に台を持つ Dirac 測度,  $\mu$  は Lebesgue 測度に対して絶対連続であると予想されているが, 特殊な場合を除いて, よく分かってはいない. “閾値”  $\mathcal{N}_0$  より, 少しだけ大きな  $L^2$  ノルムを持つ爆発解に対しては ( $d = 1, 2, 3, 4$ ), 次の評価が知られている [6, 3]:

$$\|\nabla\psi(t)\| \asymp \sqrt{\frac{\ln \ln(T_{\max} - t)^{-1}}{T_{\max} - t}}.$$

この振る舞いを, 「業界」では loglog law と呼んでいる [7]. ここでは, この問題を少し別の角度から見てみることにする. 上のような極限形状を持つことなどを利用して, 爆発スピードを Brown 運動を用いて評価することができる. 次を仮定する:

$$\int_0^{T_{\max}} \|\nabla\psi(t)\| dt < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|\nabla\psi(t)\| \int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\| d\tau = \infty.$$

**Theorem 1.** 十分大きな  $M > 0$  が存在して,

$$P \left[ |B_{T_{\max}} - B_t| \leq M \int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\| d\tau, \text{ e.f.} \right] = 1$$

が成り立つ.

上からの評価には, さらに「技術的」な仮定が必要ではあるが (詳細は講演時に), 次の評価を得ることができる: 十分小さな  $\eta > 0$  に対して

$$P \left[ |B_{T_{\max}} - B_t| \geq \eta \int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\| d\tau, \text{ i.o.} \right] = 1$$

## References

- [1] Carlen, E.: Conservative diffusions, *Commun. Math. Phys.* **94** 293–315 (1983).
- [2] Gadi, F.: “The Nonlinear Schrödinger equation: Singular Solutions and Optical Collaps”, *Applied Mathematical Sciences* 192, Springer, Switzerland, 2015.
- [3] Merle, F. and Raphael, P.: *Blow-up dynamics and upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation*, *Ann. Math.* **16**, pp. 157–222 (2005)
- [4] Nawa, H.: *Asymptotic and limiting profiles of blow-up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power*, *Commun. Pure and Applied Math.* **52** (1999), pp. 193–270 (1999)
- [5] Nelson, E.: “Quantum fluctuations”, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984.
- [6] Perelman, G.: *On the blow-up phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1 D*, *Ann. Henri Poincaré* **2**, pp. 605–673 (2001)
- [7] Sulem, C. and Sulem, P.-L.: “Nonlinear Schrödinger equation: Self-focusing and wave collaps”, *Applied Mathematical Sciences* 139, Springer-verlag, New York, 1999.

# 余次元 1 のホモロジー生成元に関する パーコレーション

見上 達哉\*

本研究は平岡裕章氏（京都大学高等研究院）との共同研究である。

## 1 背景

パーコレーション理論とは、ランダムに生じる対象のなすクラスターのふるまいを考察する確率論の一分野である。最も基本的なモデルとして、 $d$  次元正方格子  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$  の各ボンド（辺）を確率  $p \in [0, 1]$  で独立に発生させるボンドパーコレーションモデルがある。  $C(0) \subset \mathbb{L}^d$  を発生したボンドからなる部分グラフの連結成分のうち原点を含むものとするとその頂点数  $|C(0)|$  は確率変数となり、  $C(0)$  が無限グラフとなる浸透確率  $\theta^{\text{bond}}(p) = P_p(|C(0)| = \infty)$  および、  $\theta^{\text{bond}}(p)$  が 0 より真に大きくなる臨界確率  $p_c^{\text{bond}}(d) = \inf\{p \in [0, 1] : \theta^{\text{bond}}(p) > 0\}$  が定義される。任意の空間次元  $d \geq 2$  に対して  $0 < p_c^{\text{bond}}(d) < 1$  であることが容易に示され、  $p < p_c^{\text{bond}}$ ,  $p > p_c^{\text{bond}}$  のときの相をそれぞれ亜臨界相、超臨界相と呼ぶ。ボンドパーコレーションモデルの特徴のひとつとして、この臨界確率前後における相転移現象が挙げられ、次のように定式化される。

定理 1.1.  $p > p_c^{\text{bond}}$  に対しある正定数  $c > 0$  が存在し、任意の 2 頂点  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  に対し

$$P_p(x \overset{\text{bond}}{\longleftrightarrow} y) \geq c. \quad (1)$$

$p < p_c^{\text{bond}}$  に対しある正定数  $\sigma > 0$  が存在し、任意の 2 頂点  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  に対し

$$P_p(x \overset{\text{bond}}{\longleftrightarrow} y) \leq e^{-\sigma n}. \quad (2)$$

ここで 2 頂点  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  が発生したボンドにより接続される事象を  $x \overset{\text{bond}}{\longleftrightarrow} y$  と書いた。定理 1.1 は、接続確率  $P_p(x \overset{\text{bond}}{\longleftrightarrow} y)$  のふるまいが臨界確率の前後で定性的に変化することを述べている。ボンドパーコレーションモデルの詳細については文献 [1] を参照されたい。

パーコレーション理論は、多孔質岩への水の浸透現象などの物理的背景を持つが、近年関連が注目されている新たな物理現象として、高分子の破壊現象が挙げられる。論文 [3] では、高分子化合物に張力を加えたときにできる亀裂が、高分子内部に生じる微小な空隙の連なりによって生成されることを示しており、これは亀裂の生成が空隙のパーコレーションとして記述され得ることを示唆している。

## 2 ホールパーコレーションモデル

本講演では、この破壊現象を背景にもつ新たなパーコレーションモデルを提案する。このモデルにおいて、高分子内に生じる空隙は、 $\mathbb{R}^d$  内にランダムに生じる図形の  $(d-1)$  次のホモロジー生成元として表される。従来のパーコレーションモデルは主にランダムグラフの枠組みで考察され、頂点の連なりを調べているものが多い。本研究では、この「頂点」を 0 次のホモロジー生成元と捉え、その高次元版として「空洞」に相当する余次元 1 のホモロジー生成元の連なりを考察することを考えた。このモデルをホールパーコレーションモデルと呼ぶ。

\*東北大学大学院理学研究科博士課程前期 2 年 E-mail: mikami1642@gmail.com

以降,  $d \geq 2$  とする.  $\mathbb{R}^d$  上の余次元 1 の基本方体を面と呼ぶ. 即ち, 面とはある整数  $l \in \mathbb{Z}$  を用いて  $I = [l, l+1]$  または  $[l, l]$  と書ける区間の  $d$  個の直積であり, その次元が  $(d-1)$  であるものとする.  $\mathbb{R}^d$  上の面全体を  $\mathcal{K}_{d-1}^d$  とおく. 上述のパーコレーションモデルと同様, 各面  $Q \in \mathcal{K}_{d-1}^d$  が同確率  $p \in [0, 1]$  で独立に発生する確率過程を与える.

面の発生状態  $\omega \in \{0, 1\}^{\mathcal{K}_{d-1}^d}$  から定まる  $\mathbb{R}^d$  内の図形  $K(\omega)$  に対し, 補集合  $\mathbb{R}^d \setminus K(\omega)$  の各有界連結領域は  $K(\omega)$  の  $(d-1)$  次体係数ホモロジー群の生成元と自然に一対一対応する. この有界連結領域をホールと呼ぶ.  $\omega$  から誘導されるホールグラフ  $G(\omega)$  を, 各ホールを頂点とし, 隣接関係を共通の境界面を持つこととして定めたグラフとする.  $G(\omega)$  の連結成分  $G_0(\omega)$  を一つ固定し, ボンドパーコレーション理論と同様, 浸透確率  $\theta^{\text{hole}}(p) := P_p(|G_0(\omega)| = \infty)$  および臨界確率  $p_c^{\text{hole}} := \inf\{p : \theta^{\text{hole}}(p) > 0\}$  が定義される.

以上の設定のもとで, まず本研究では臨界確率  $p_c^{\text{hole}}(d)$  に関する評価を与えた.

**定理 2.1.** 任意の空間次元  $d \geq 2$  に対し,

$$0 < p_c^{\text{hole}}(d) \leq 1 - p_c^{\text{bond}}(d).$$

定理 2.1 から, このモデルに対しても亜臨界相, 超臨界相が存在することが分かる. さらに本研究では, ボンドパーコレーションモデルの超臨界相における接続確率の評価 (1) の類似を得た. ここで,  $(\mathbb{Z}^d)^* = \mathbb{Z}^d + (1/2, \dots, 1/2)$  を双対格子の頂点集合とし, 2 頂点  $x^*, y^* \in (\mathbb{Z}^d)^*$  がホールグラフの同一の連結成分に含まれていることを  $x^* \xleftrightarrow{\text{hole}} y^*$  と表す.

**定理 2.2.**  $p > p_c^{\text{hole}}$  に対し, ある定数  $c > 0$  が存在し, 任意の  $x^*, y^* \in (\mathbb{Z}^d)^*$  に対し

$$P_p(x^* \xleftrightarrow{\text{hole}} y^*) \geq c$$

が成立する.

本講演は論文 [2] に基づく.

**謝辞** 本研究は, JST CREST Mathematics 15656429 および JSPS 挑戦的研究 (萌芽) 17829801 の助成を受けている.

## 参考文献

- [1] Grimmett, G.: Percolation. Springer-Verlag, Berlin (1999)
- [2] Hiraoka, Y., Mikami, T.: Percolation on homology generators in codimension one. Preprint <https://arxiv.org/abs/arXiv:1809.07490>
- [3] Ichinomiya, T., Obayashi, I., Hiraoka, Y.: Persistent homology analysis of craze formation. Phys. Rev. E. **95**, 012504 (2017)

# Superdiffusion of energy in harmonic chains with noises and long-range interactions

須田 颯 (東京大学大学院数理科学研究科)

2018 年 12 月 20 日

本講演では, 確率的な摂動を含む長距離相関調和振動子鎖モデル  $\{(p_x(t), q_x(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$ ,

$$\begin{cases} dq_x(t) = p_x(t)dt \\ dp_x(t) = -\sum_{z \in \mathbb{Z}} \alpha(x-z)q_z(t)dt + \sqrt{\gamma}(\text{noises}) \end{cases}$$

におけるエネルギー分布の時空スケール極限を考察する. すなわち, スケールパラメータを  $0 < \epsilon < 1$  とした時,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}[e_x(\frac{t}{f(\epsilon)})] \delta_{\epsilon x} = \mathbf{e}(y, t) dy$$

なる非自明な極限  $\mathbf{e}(y, t) dy$  が得られるような時空スケール比  $f(\epsilon)$ , 及び  $\mathbf{e}(y, t)$  の満たす偏微分方程式を求め. ここで,  $p_x(t), q_x(t), e_x(t) := \frac{1}{2}|p_x(t)|^2 - \frac{1}{4} \sum_{z \in \mathbb{Z}, z \neq x} \alpha(x-z)|q_x(t) - q_z(t)|^2$  は  $x$  番目の振動子の時刻  $t$  における運動量, 位置, エネルギーを表す.  $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  は振動子間の相互作用ポテンシャルであり,  $\sum_x \alpha(x) = 0, \alpha(x) = \alpha(-x), x \in \mathbb{Z}, \alpha(x) \leq 0, x \neq 0$  を満たす.  $\gamma > 0$  は確率的摂動の強度である.

[1, 2] [3] では,  $|\alpha(x)| \leq e^{-C|x|}, x \in \mathbb{Z}$  なる  $C > 0$  が存在し,  $\gamma = \epsilon^s \gamma_0, 0 \leq s \leq 1, \gamma_0 > 0$  とし摂動もスケールされている場合,  $f(\epsilon) = \epsilon^{\frac{3-s}{2}}, \partial_t \mathbf{e}(y, t) = -C_{\gamma_0, \alpha}(-\Delta)^{\frac{3}{4}} \mathbf{e}(y, t)$  であることが示されている.  $C_{\gamma_0, \alpha} > 0$  は  $\gamma_0, \alpha$  によって決まる定数である. これは相互作用ポテンシャル  $\alpha$  が指数的減衰をする場合, 本質的に nearest neighbor interaction ( $\alpha(0) = 2, \alpha(\pm 1) = -1, \alpha(x) = 0, |x| \geq 2$ ) の場合と同じエネルギー分布の挙動が観測されることを意味しており, 長距離相関が巨視的に影響していない.

講演者は,  $\alpha(x) = -|x|^{-\theta}, \theta > 2, \gamma = \epsilon^s \gamma_0, 0 \leq s \leq 1, \gamma_0 > 0$  の場合,

$$\begin{aligned} 2 < \theta < 3 &\longrightarrow f(\epsilon) = \epsilon^{\frac{6-s(\theta-1)}{7-\theta}}, \quad \partial_t \mathbf{e}(y, t) = -C_{\gamma_0, \theta}(-\Delta)^{\frac{3}{7-\theta}} \mathbf{e}(y, t), \\ \theta > 3 &\longrightarrow f(\epsilon) = \epsilon^{\frac{3-s}{2}}, \quad \partial_t \mathbf{e}(y, t) = -C_{\gamma_0, \theta}(-\Delta)^{\frac{3}{4}} \mathbf{e}(y, t), \\ \theta = 3 &\longrightarrow \epsilon^{\frac{3-s}{2}} < f(\epsilon) < \epsilon^{\frac{3-s}{2}-\delta}, \forall \delta > 0, \quad \partial_t \mathbf{e}(y, t) = -C_{\gamma_0, \theta}(-\Delta)^{\frac{3}{4}} \mathbf{e}(y, t) \end{aligned}$$

であることを示した. これから  $2 < \theta < 3$  の場合は長距離相関が巨視的にも影響しており,  $\theta = 3$  の場合も時間スケールがわずかに速くなることが分かる.  $2 < \theta \leq 3$  の時は特に, sound speed と呼ばれる量  $\frac{\hat{\alpha}'(k)}{\sqrt{\hat{\alpha}(k)}}$ ,  $\hat{\alpha}(k) := \sum_{x \in \mathbb{Z}} \alpha(x) e^{-2\pi k x}, k \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  が  $k \rightarrow 0$  で発散する. 上記の指数的減衰や  $\theta > 3$  の場合, sound speed は常に有界であり, この顕著な違いがエネルギー分布の挙動に影響している.

## 参考文献

- [1] G. BASILE, S. OLLA, H. SPOHN : *Energy transport in stochastically perturbed lattice dynamics.* Arch. Ration. Mech. **195**, 171–203 (2009)

- [2] M. JARA, T. KOMOROWSKI, S. OLLA : *A limit theorem for an additive functionals of Markov chains*. Ann. Appl. Probab. **19**, 2270–2230 (2009)
- [3] M. JARA, T. KOMOROWSKI, S. OLLA : *Superdiffusion of Energy in a Chain of Harmonic Oscillators with Noise*. Commun. Math. Phys. **339**, 407–453 (2015)

# Eigenvalue processes of Ginibre ensemble and their properties

藪奥 哲史 (千葉大学大学院理学研究院)

## 1 導入

Ginibre Ensemble (GE) の時間発展による固有値過程について議論する. GE はランダム行列のモデルであり, 行列成分が独立な複素正規分布に従う非対称行列である. GE の固有値は複素数値で, その経験分布は複素単位円板上の一様分布に確率 1 で収束する [1]. 近年この GE に対する時間発展モデルが研究されつつあるが ([2],[3]), このモデルは非正規行列であるため, 従来のエルミート行列に対する手法が適用できない. そこで本講演では陰関数定理によってこの固有値過程の確率微分方程式を具体的に導出し, さらにその固有ベクトルが固有値過程の挙動に影響を与えることを示す. このことはエルミート行列の固有値の時間発展モデルである Dyson ブラウン運動の場合とは大きく異なる.

## 2 ランダム行列の時間発展モデル

まず正規行列の, 特にエルミート行列の固有値過程である Dyson ブラウン運動を述べる.  $N$  次エルミート行列値確率過程  $H(t) = (h_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$  を次のように定める:

$$h_{ij}(t) := \begin{cases} B_{ii}(t) & i = j \\ \frac{B_{ij}^R(t) + \sqrt{-1}B_{ij}^I(t)}{\sqrt{2}} & i < j \\ \overline{h_{ji}(t)} & i > j \end{cases}, t > 0$$

ここで  $B_{ii}, B_{ij}^R, B_{ij}^I (i < j)$  は独立な 1 次元標準ブラウン運動である.

$H(t)$  は  $N$  個の実固有値  $\lambda_1(t) \geq \dots \geq \lambda_N(t)$  をもち, この固有値過程は 1 次元非衝突ブラウン運動と解釈できることが知られている.

**Theorem** (Dyson 1962 [4]).

$H(t)$  の実固有値過程  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t))$  は次の確率微分方程式を満たす:

$$d\lambda_i(t) = dB'_i(t) + \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt, \quad i = 1, \dots, N$$

ここで  $B'_1, \dots, B'_N$  は独立な 1 次元標準ブラウン運動である.

Dyson ブラウン運動では, 他の固有値との相互作用を表す差の逆数の和がドリフト項に現れる.

次に GE の時間発展モデルとして  $N$  次非対称, 非正規行列値確率過程  $G(t) = (G_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$  を次のように定める:

$$G_{kl}(t) = B_{kl}(t) := B_{kl}^R(t) + \sqrt{-1}B_{kl}^I(t), \quad 1 \leq k, l \leq N, \quad t > 0$$



ここで  $B_{kl}^R, B_{kl}^I$ ,  $1 \leq k, l \leq N$  は独立な 1 次元標準ブラウン運動であり,  $B_{kl}$  は複素ブラウン運動である.  $G(t)$  は  $N$  個の複素固有値をもつ. このとき陰関数定理と伊藤の公式によって次の結果を得る.

**Theorem 1 (Y).**

$G(t)$  の複素固有値過程  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t))$  は次の確率微分方程式を満たす:

$$d\lambda_i(t) = \sum_{1 \leq k, l \leq N} \frac{-\det((\lambda_i(t)I_N - G(t))_{k|l})}{\prod_{j(\neq i)} (\lambda_i(t) - \lambda_j(t))} dB_{kl}(t), \quad i = 1, \dots, N$$

ここで  $I_N$  は単位行列で, 正方行列  $A$  に対して  $A_{k|l}$  は  $A$  から  $k$  行  $l$  列を取り除いて得られる小行列である.

この結果から GE の固有値過程はマルチンゲールであり, 他の固有値との相互作用を表す差積がマルチンゲール項に現れることがわかる.

さらに Bourgade, Dubach [3] の結果を用いると, 相互変分について

$$d\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle_t = 0, \quad d\langle \lambda_i, \overline{\lambda_j} \rangle_t = 2\mathcal{O}_{ij}(t)dt.$$

が成り立つ. ここで  $\mathcal{O}_{ij}(t)$  は固有ベクトルの Overlap と呼ばれ, 右固有ベクトル  $R_j(t) \in \mathbb{C}^N$  と左固有ベクトル  $L_j(t) \in \mathbb{C}^N$  によって

$$\mathcal{O}_{ij}(t) := \left( R_j(t)^* R_i(t) \right) \left( L_j(t)^* L_i(t) \right)$$

で定義される量である. 彼らは  $G(t)$  を正則行列によって対角化することで, 固有値過程の相互変分が固有ベクトルの内積で記述できることを示した. この Overlap を具体的に表すと次のようになる.

**Proposition 2 (Y).**

$$\mathcal{O}_{ii}(t) = \frac{\sum_{k=1}^N \det \left( ((\lambda_i(t)I_N - G(t))(\lambda_i(t)I_N - G(t))^*)_{k|k} \right)}{\prod_{i(\neq p)} |\lambda_i(t) - \lambda_p(t)|^2}$$

$$\mathcal{O}_{ij}(t) = \frac{\sum_{k=1}^N \det \left( ((\lambda_i(t)I_N - G(t))(\lambda_j(t)I_N - G(t))^*)_{k|k} \right)}{\prod_{p(\neq i)} (\lambda_i(t) - \lambda_p(t)) \prod_{q(\neq j)} \overline{(\lambda_j(t) - \lambda_q(t))}}$$

以上のことから, GE の場合 Overlaps が固有値過程に影響を与えていることがわかる. これは Dyson ブラウン運動などの正規行列のモデルでは起こらなかったことであり, 非正規行列特有の現象である. 本講演では上の結果からさらに固有値過程の時間変更による表示について議論する. また数値実験の結果 [5] についても言及する.

## 参考文献

- [1] M. L. Mehta, Random Matrices, second edition, Academic Press (1991).
- [2] J.Grela, P.Warchol, Full Dysonian dynamics of the complex Ginibre ensemble, J. Phys. A: Math. Theor. Vol.51, Num.425203(2018)
- [3] P. Bourgade, G. Dubach, The distribution of overlaps between eigenvectors of Ginibre matrices, arXiv:1801.01219v1 (2018)
- [4] F. J. Dyson, A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, J. Math. Phys., Vol. 3, 1192-1198 (1962)
- [5] J.-P.Blaizot, J.Grela, M.A.Nowak, W.Tarnowski, P.Warchol, Ornstein-Uhlenbeck diffusion of hermitian and non-hermitian matrices-unexpected links, J.Stat.Mech.Vol.2016,May,054037(2016)

# A hypercontractive family of the Ornstein–Uhlenbeck semigroup and its connection with $\Phi$ -entropy inequalities\*

針谷 祐 (東北大学)

Given a positive integer  $d$ , let  $\gamma_d$  be the  $d$ -dimensional standard Gaussian measure. For every  $p > 0$ , define  $L^p(\gamma_d)$  to be the set of measurable functions  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $\|f\|_p^p := \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \gamma_d(dx) < \infty$  (we abuse the notation even when  $p < 1$ ). We denote by  $Q = \{Q_t\}_{t \geq 0}$  the Ornstein–Uhlenbeck semigroup acting on  $L^1(\gamma_d)$ : for  $f \in L^1(\gamma_d)$  and  $t \geq 0$ ,

$$(Q_t f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right) \gamma_d(dy), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

It is well known that  $Q$  enjoys the hypercontractivity: if  $f \in L^p(\gamma_d)$  for some  $p > 1$ , then

$$\|Q_t f\|_{q(t)} \leq \|f\|_p \quad \text{for all } t \geq 0, \quad (\text{HC})$$

where  $q(t) = e^{2t}(p - 1) + 1$ . The hypercontractivity (HC) was firstly observed by Nelson [6] and found later by Gross [4] to be equivalent to the (Gaussian) logarithmic Sobolev inequality<sup>†</sup>:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \log |f| d\gamma_d \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 d\gamma_d + \|f\|_2^2 \log \|f\|_2, \quad (\text{LSI})$$

which holds true for any weakly differentiable function  $f$  in  $L^2(\gamma_d)$  with  $|\nabla f| \in L^2(\gamma_d)$ . It is also known (see [1, Proposition 4]) that (HC) is equivalent to the exponential hypercontractivity: for any  $f \in L^1(\gamma_d)$  with  $e^f \in L^1(\gamma_d)$ , it holds that

$$\|\exp(Q_t f)\|_{e^{2t}} \leq \|e^f\|_1 \quad \text{for all } t \geq 0. \quad (\text{eHC})$$

One of the objectives of this talk is to show, by employing stochastic analysis, that two hypercontractivities (HC) and (eHC) are unified into

**Theorem 1** ([5], Theorem 1.1). *Let a positive function  $c$  in  $C^1((0, \infty))$  satisfy*

$$c' > 0 \text{ and } c/c' \text{ is concave on } (0, \infty), \quad (\text{C})$$

and set

$$u(t, x) = \int_0^x c(y) e^{2t} dy, \quad t \geq 0, \quad x > 0. \quad (1)$$

Then for any nonnegative, measurable function  $f$  on  $\mathbb{R}^d$  such that

$$u(0, f) \in L^1(\gamma_d),$$

we have

$$v(t, \|u(t, Q_t f)\|_1) \leq v(0, \|u(0, f)\|_1) \quad \text{for all } t \geq 0. \quad (\text{uHC})$$

Here for every  $t \geq 0$ , the function  $v(t, \cdot)$  is the inverse function of  $u(t, x)$ ,  $x > 0$ .

Typical examples of functions  $c$  fulfilling the condition (C) are  $x^{p-1}$  with  $p > 1$  and  $e^x$ ; in fact, they both satisfy  $(c/c')'' = 0$ . These two choices of  $c$  in Theorem 1 lead to (HC) and (eHC), respectively. Another example of  $c$  will be given in the talk.

Recall the well-known fact that differentiating the left-hand side of (HC) at  $t = 0$  yields (LSI); the same argument enables us to obtain from (uHC) the following generalization of (LSI):

---

\*This talk is based on [5].

<sup>†</sup>The Gaussian logarithmic Sobolev inequality goes back to Stam [7].

**Corollary 1** ([5], Corollary 3.1). *For a function  $c$  satisfying the assumptions in Theorem 1, set*

$$G(x) = \int_0^x c(y) dy \quad \text{and} \quad H(x) = \int_0^x c(y) \log c(y) dy$$

for  $x > 0$ . Then for any  $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$  with  $\inf_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) > 0$ , we have

$$\int_{\mathbb{R}^d} H(f) d\gamma_d \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} c'(f) |\nabla f|^2 d\gamma_d + H \circ G^{-1}(\|G(f)\|_1). \quad (\text{gLSI})$$

Here  $G^{-1}$  is the inverse function of  $G$ .

It is shown in [5, Proposition 3.3] that for every function  $f$  as in Corollary 1, the validity of (gLSI) for any positive  $c \in C^1((0, \infty))$  satisfying (C), is necessary and sufficient for that of  $\Phi$ -entropy inequalities for any  $\Phi \in C^2((0, \infty))$  satisfying the condition that

$$\Phi'' > 0 \text{ and } 1/\Phi'' \text{ is concave on } (0, \infty). \quad (\text{P})$$

In a general setting of Markov triple  $(E, \mu, \Gamma)$  with associated Dirichlet form  $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$  as treated in detail in [2, Chapters 4–7], the triple is said to satisfy the  $\Phi$ -entropy inequality with constant  $R > 0$  if

$$\int_E \Phi(f) d\mu - \Phi\left(\int_E f d\mu\right) \leq \frac{R}{2} \int_E \Phi''(f) \Gamma(f, f) d\mu \quad (\Phi\text{I})$$

for any positive  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ . In the setting of the present talk, namely in the case  $E = \mathbb{R}^d$ ,  $\mu = \gamma_d$  and  $\Gamma(f, f) = |\nabla f|^2$ , it is known (see, e.g., [3, Section 4]) that  $(\Phi\text{I})$  holds with  $R = 1$  under the condition (P). In this talk, we show that in the present setting, the hypercontractive family (uHC) indexed by positive  $c$ 's satisfying (C), is equivalent to the family of  $\Phi$ -entropy inequalities  $(\Phi\text{I})$  with  $R = 1$  indexed by  $\Phi$ 's satisfying (P). The same reasoning applies to the general setting of Markov triple as well. For instance, if a probability measure  $\mu$  on  $E = \mathbb{R}^d$  is in the form  $\mu(dx) = e^{-V(x)} dx$  with  $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$  whose Hessian matrix satisfies  $y \cdot \text{Hess}_V(x) y \geq \rho |y|^2$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , for some  $\rho > 0$ , then the  $\Phi$ -entropy inequality  $(\Phi\text{I})$  for  $\Gamma(f, f) = |\nabla f|^2$  is known (cf. [3, Corollary 2.1]) to hold with  $R = 1/\rho$ , which entails that (uHC) holds true for the semigroup generated by  $\Delta - \nabla V \cdot \nabla$ , with exponent  $e^{2t}$  in (1) replaced by  $e^{2\rho t}$ .

If time permits, we will also present a unification of (eHC) and the reverse hypercontractivity of the Ornstein–Uhlenbeck semigroup  $Q$ .

## References

- [1] D. Bakry, M. Émery, Diffusions hypercontractives, in: Séminaire de Probabilités, XIX, 1983/84, pp. 177–206, Lecture Notes in Math. **1123**, Springer, Berlin, 1985.
- [2] D. Bakry, I. Gentil, M. Ledoux, Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators, Springer, Cham, 2014.
- [3] D. Chafaï, Entropies, convexity, and functional inequalities: on  $\Phi$ -entropies and  $\Phi$ -Sobolev inequalities, J. Math. Kyoto Univ. **44** (2004), 325–363.
- [4] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, Amer. J. Math. **97** (1975), 1061–1083.
- [5] Y. Hariya, A unification of hypercontractivities of the Ornstein–Uhlenbeck semigroup and its connection with  $\Phi$ -entropy inequalities, J. Funct. Anal. **275** (2018), 2647–2683.
- [6] E. Nelson, The free Markoff field, J. Funct. Anal. **12** (1973), 211–227.
- [7] A.J. Stam, Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon, Inform. and Control **2** (1959), 101–112.

# Biased random walk on the trace of biased random walk

D. A. Croydon (University of Warwick)

*NB. This talk is based on the forthcoming work [8], which is joint with M. P. Holmes (University of Melbourne).*

The study of stochastic processes in disordered media is an important aspect of modern probability. Models in this area for which extensive research has been conducted include the classical model of random walk in random environment, as well as random walks on random graphs, such as Galton-Watson trees and percolation clusters. Typical properties that one is interested in include: (i) recurrence/transience; (ii) laws of large numbers (i.e. the existence of a deterministic limiting velocity); (iii) conditions for ballisticity/sub-ballisticity (i.e. strict positivity of the speed or not); (iv) regularity (i.e. continuity, monotonicity or lack thereof) of attributes (e.g. the velocity) in terms of some underlying parameter; and (v) scaling limits.

In this paper, we tackle the first three of these issues for a biased random walk on a random graph, as given by the trace of a biased random walk on  $\mathbb{Z}^d$ ; we henceforth call the process of interest the ‘biased random walk on the trace of biased random walk’ (BRWBRW). The biases are chosen so that both the original walk (defining the graph) and the BRWBRW are transient – somewhat remarkably, this does not mean that we necessarily require the underlying drift of the two walks to be oriented in the same direction. By standard regeneration arguments, the BRWBRW admits a limiting speed. Regarding the issue of ballisticity, we note that, when it backtracks, the initial walk creates traps for the BRWBRW. We will show that the effect of this trapping can lead to zero speeds, and in particular establish a sharp phase transition for whether the BRWBRW is ballistic or sub-ballistic.

We conclude by briefly relating our work to other studies in which trapping has been observed for biased random walk on random graphs. As early as the 1980s, physicists observed that such phenomenon might be relevant when the random graphs are percolation clusters, empirically demonstrating the non-monotonicity of the speed, and sub-ballisticity in the strong bias regime [1]. Mathematically, a phase transition between ballisticity and sub-ballisticity was first shown rigorously for the simpler model of random walk on supercritical Galton-Watson trees [10] (see also [3, 5, 7] for recent work concerning more detailed properties of such processes), and has since been confirmed to hold in the percolation setting [4, 9, 11]. A relatively up-to-date survey of these developments is given in [2]. Qualitatively, our results match those established for Galton-Watson trees and percolation clusters, and, although we do not confirm it rigorously, we also observe empirically non-monotonic behaviour for the speed that is similar to the behaviour expected for these other models. Moreover, whilst our graphs are more complex than trees, in the sense there is not a unique shortest path between vertices and the traps are less obviously defined, the model is still more tractable than the percolation case. As a result, we are able to give a more concrete expression for the critical point that separates the ballistic and sub-ballistic phase, which we are even able to evaluate explicitly in examples. Finally, we note that,

in another related work, biased random walk on an unbiased random walk has been shown to exhibit localisation on a logarithmic scale [6].

## References

- [1] M. Barma and D. Dhar, *Directed diffusion in a percolation network*, J. Phys. C **16** (1983), no. 8, 1451.
- [2] G. Ben Arous and A. Fribergh, *Biased random walks on random graphs*, Probability and statistical physics in St. Petersburg, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 91, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, pp. 99–153.
- [3] G. Ben Arous, A. Fribergh, N. Gantert, and A. Hammond, *Biased random walks on Galton-Watson trees with leaves*, Ann. Probab. **40** (2012), no. 1, 280–338.
- [4] N. Berger, N. Gantert, and Y. Peres, *The speed of biased random walk on percolation clusters*, Probab. Theory Related Fields **126** (2003), no. 2, 221–242.
- [5] A. Bowditch, *Escape regimes of biased random walks on Galton-Watson trees*, Probab. Theory Related Fields **170** (2018), no. 3-4, 685–768.
- [6] D. A. Croydon, *Slow movement of a random walk on the range of a random walk in the presence of an external field*, Probab. Theory Related Fields **157** (2013), no. 3-4, 515–534.
- [7] D. A. Croydon, A. Fribergh, and T. Kumagai, *Biased random walk on critical Galton-Watson trees conditioned to survive*, Probab. Theory Related Fields **157** (2013), no. 1-2, 453–507.
- [8] Croydon, D. A. and M. P. Holmes (2018). *Biased random walk on the trace of biased random walk on the trace of . . .*. In preparation.
- [9] A. Fribergh and A. Hammond, *Phase transition for the speed of the biased random walk on the supercritical percolation cluster*, Comm. Pure Appl. Math. **67** (2014), no. 2, 173–245.
- [10] R. Lyons, R. Pemantle, and Y. Peres, *Biased random walks on Galton-Watson trees*, Probab. Theory Related Fields **106** (1996), no. 2, 249–264.
- [11] A.-S. Sznitman, *On the anisotropic walk on the supercritical percolation cluster*, Comm. Math. Phys. **240** (2003), no. 1-2, 123–148.