ラフパス解析入門*

会田 茂樹
東北大学

1 Introduction

$f(t), g(t)$ $(0 \le t \le T)$ を実数値連続関数とする．f または g が有界変動ならば積分

$$\int_0^T f(t)dg(t) = \lim_{|D|\to 0} \sum_{i=1}^{N} f(t_{i-1})(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

が定まる (Stieltjes 積分). ただし $D = \{0 = t_0 < \cdots < t_N = T\}$ $|D| = \max_{1\le i\le N}(t_i - t_{i-1})$.
実は Young により

(i) f が α-ヘルダー連続, g が β-ヘルダー連続, ただし $\alpha + \beta > 1$

(ii) f の p 次変分ノルム, g の q 次変分ノルムが有限, ただし $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$

の場合も上記積分が有限確定なことが示されている (ヤング積分).
ここでブラウン運動 $B(t)$ のパスはよく知られているように

(i) ほとんどすべてのブラウン運動のパスは $(\frac{1}{2} - \varepsilon)$-ヘルダー連続 $(\forall\varepsilon > 0)$ だがほとんどすべてのブラウン運動のパスの $\frac{1}{2}$-ヘルダーノルムは $+\infty$.

(ii) ほとんどすべてのブラウン運動のパスの p 次変分ノルムは有限 $(\forall p > 2)$ だがほとんどすべてのブラウン運動のパスの 2 次変分ノルムは $+\infty$.

したがって，$p < 2$ で f が $\frac{1}{p}$ ヘルダー連続または p 次変分ノルムが有限ならば積分 $\int_0^T f(t)dB(t)$ は確定する．

しかし確率解析では $f(t)$ 自身もブラウン運動と同程度の連続性しか期待できない．ゆえにヤング積分ではブラウン運動を含む確率過程に対する確率積分は定義できない．

Rough path(=ラフパス) に対する積分はヤング積分を拡張したもので，これによりブラウン運動に対する確率積分をラフパスに対する積分としてとらえられるようになる．

しかし、誤解しないで欲しいが、ブラウン運動のほとんどすべてのパスをラフパスの空間に埋め込むことができ, このラフパス (Brownian rough path という) に対してラフパスの積分の理論が適用できるわけで、ラフパスの空間に埋め込むことができることを証明するためには確率解析

*大阪大学基礎工学研究科集中講義 (2011 年 1 月 31 日〜2 月 4 日) の講義資料.

の知識が必要である．また，　ラフパスの積分と考えると fractional Brownian motion など semi-martingale で無い確率過程に対して積分も定義できるなどマルチンゲールに基づく積分の範囲を越えて積分を定義できるのも長所の一つである[1] また, 昨年の SPA での Hairer[13] の講演に見られるように時間変数でなく空間変数の積分に対して積分の意味をつけるためにラフパスのアイデアを用いている研究もある. マルチンゲール理論ではとらえられない確率過程, 確率場の研究は難しいと思われるが、ラフパスはその 1 つの理解の仕方を与えてくれている.

この講義では，まずヤング積分を復習し、ラフパス、ラフパスによる積分、ラフパスで drive された微分方程式の基礎を説明する．講義の最後の方でブラウン運動をラフパスの空間に埋め込む方法，確率解析への応用を述べる．講義は以下の順番で話をします.

- Introduction とヤング積分 (I)
- ヤング積分 (II)
- ヤング積分 (III)
- 重複積分 ($\|\bar{x}^1\|_p$, $\|\bar{x}^2\|_{p/2}$) を用いて $I(f,x)^1_{s,t}$ を評価する (I)
- 確率積分との関連
- 重複積分 ($\|\bar{x}^1\|_p$, $\|\bar{x}^2\|_{p/2}$) を用いて $I(f,x)^1_{s,t}$ を評価する 連続性定理 (II)
- ラフパスの定義およびラフパスに対する積分 (I)
- ラフパスに対する積分 (II) 連続性定理
- ラフパスでドライブされた微分方程式
- ラフパスでドライブされた微分方程式 (連続性定理)
- 確率解析への応用

2　ヤング積分

以下使う notation をまとめる．

$E=\mathbb{R}^d$, $F=\mathbb{R}^m$, $G=\mathbb{R}^l$．$L(E,F)$ で E から F への線型写像全体を表す．$C_b^k(G,L(E,F))$ で G から $L(E,F)$ への有界な連続写像で k 回連続的微分可能かつそれらの微分の sup-norm がすべて有限となるもの全体を表す.

$x={}^t(x_i)\in E$ に対して

$$|x|=\left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^{1/2}\qquad \text{(ユークリッドノルム)}$$

[1]Stratonovich 積分の一般化や,Ogawa 積分など semi-martingale でない物に対する積分を定義する試みは他にもあるが.[27, 28]

双線形写像 $T \in L(E_1 \times \cdots E_n) \to F$ のノルムを Hilbert-Schmidt ノルム、すなわち c.o.n.s. e_i を取り

$$\|T\| = \left\{ \sum_{i_1,\dots,i_n} |T(e_{i_1},\dots,e_{i_n})|^2 \right\}^{1/2}$$

と定める．したがって

$$|T(a_1,\dots,a_n)| \le \|T\| \prod_{i=1}^n |a_i|$$

となる．また $p \ge 1$ に対して

$$|\sum_{i=1}^n a_i|^p \le n^{p-1} \sum_{i=1}^n |a_i|^p$$

なる式を何回も用いる．

$$PC_T^1(E) := PC^1([0,T] \to E \mid x_0 = 0)$$

で $[0,T]$ から E への区分的に C^1 な連続写像 x で $x_0 = 0$ となるもの全体を表す．$C_T(E) := C([0,T] \to E \mid x_0 = 0)$ で $[0,T]$ から E への連続写像で $x_0 = 0$ となるもの全体を表す．ただし $C_T(L(E,F))$ は $Y_0 \ne 0$ を許す $Y = (Y_t) \in C([0,T] \to L(E,F))$ 全体とする．また $x \in C_T(E)$ に対して $\|x\|_\infty = \max_{0\le t\le T} |x_t|$ 等と定義する．以下の話はヘルダーノルムの場合も同様にできるが，ここでは p 次変分ノルムを考える．このことは 3 節で注意する．例えば Remark 5.5 を見よ．

Definition 2.1. $x = (x_t) \in C_T(E)$ とする．$0 \le s \le t \le T$ に対して x の $[s,t]$ における p 次変分ノルム *(p-variation norm)* $(p \ge 1)$ を

$$\|x\|_{p,[s,t]} = \left(\sup_D \sum_{i=1}^N |x_{t_i} - x_{t_{i-1}}|^p \right)^{1/p}. \tag{2.1}$$

と定める．ここで

$$D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$$

は $[s,t]$ の分割．$\|x\|_p := \|x\|_{p,[0,T]}$ と略記する．$V_T^p(E)$ で $\|x\|_p < \infty$ 全体を表す．$V_T^p(E)$ は可分ではないが完備な線型空間である．$Y \in C_T(L(E,F))$ に対しても同様に $V_T^p(L(E,F))$ を定める．

$p = 1$ のときが x の有界変動ノルム, 全変分 (total variation) である．明らかに $p > 1$ に対して

$$PC_T^1(E) \subset V_T^1(E) \subset V_T^p(E) \subset C_T(E).$$

Remark 2.2. (1) 任意の $x \in C_T(E)$, $\|x\|_\infty \le \|x\|_{p,[0,T]}$.

(2) $p \ge 1$ とする．$x \in C_T(E)$ で

$$\|x\|_{H,1/p} = \sup_{0 \le s < t \le T} \frac{|x_t - x_s|}{|t-s|^{1/p}} < \infty$$

のとき $x \in V_T^p(E)$ で $\|x\|_p \le T^{1/p} \|x\|_{H,1/p}$.

(3)　$x \in C_T(E)$, $s = t_0 < \cdots < t_N = t$ のとき

$$\|x\|_{p,[s,t]}^p \leq N^{p-1} \sum_{k=1}^{N} \|x\|_{p,[t_{k-1},t_k]}^p. \tag{2.2}$$

Definition 2.3. (1)　$x \in C_T(E), Y \in C_T(L(E,F))$ とする．$0 \leq s \leq t \leq T$ とし $[s,t]$ の分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ に対して

$$I(Y,x;D)_{s,t} \quad = \quad \sum_{i=1}^{N} Y_{t_{i-1}} \left(x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right) \tag{2.3}$$

と定める．$\lim_{|D|\to 0} I(Y,x;D)_{s,t}$ が収束するとき極限を $\int_s^t Y_u dx_u$, $I(Y,x)_{s,t}$ と書く．
(2) $x \in C_T(E), y \in C_T(G)$, $f \in C(G, L(E,F))$ で

$$Y_t = f(\xi + y_t)$$

と書ける時 $I(Y,x;D)_{s,t}$ を $I_{f,\xi}(y,x;D)$, $I(Y,x)_{s,t}$ を $\int_s^t f(\xi + y_u) dx_u$, $I_{f,\xi}(y,x)_{s,t}$ と書く．$\xi = 0$ の時，$I_f(y,x)$ と書く．また $f^\xi(\cdot) = f(\xi + \cdot)$ と定義すると $I_{f,\xi}(y,x)$ と $I_{f^\xi}(y,x)$ は同じである．

Remark 2.4. $\int_0^T Y_s dx_s$ が収束する時

$$\int_s^t Y_r dx_r + \int_t^u Y_r dx_r = \int_s^u Y_r dx_r$$

が成立すること，$I(Y,x)_{s,t}, I(Z,x)_{s,t}$ が確定する時 $I(Y+Z,x)_{s,t} = I(Y,x)_{s,t} + I(Z,x)_{s,t}$ となることはリーマン積分と同様である．

Assumption 2.5. この節では以後，$1 \leq p < 2$ とする．

Theorem 2.6. $Y \in V_T^p(L(E,F))$, $x \in V_T^p(E)$ のとき $I(Y,x)_{s,t}$ $(0 \leq s \leq t \leq T)$ は収束し

$$\|I(Y,x)\|_{p,[s,t]} \quad \leq \quad 2^{1-(1/p)} \left(\sup_{s \leq u \leq t} |Y_u|^p + 16 \|Y\|_{p,[s,t]}^p \zeta\left(\frac{2}{p}\right)^p \right)^{1/p} \|x\|_{p,[s,t]}. \tag{2.4}$$

ここで $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

$Y_t = f(y_t)$ の場合，$\|Y\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, $\|Y\|_{p,[s,t]} \leq \|\nabla f\|_\infty \|y\|_{p,[s,t]}$ なので

Theorem 2.7. $f \in C_b^1(G, L(E,F))$ とする．$x \in V_T^p(E), y \in V_T^p(G)$　$0 \leq s \leq t \leq T$ のとき積分 $\int_s^t f(y_u) dx_u$ が収束しかつ

$$\|I_f(y,x)\|_{p,[s,t]} \leq 2^{1-(1/p)} \left(\|f\|_\infty^p + 16 \|\nabla f\|_\infty^p \|y\|_{p,[s,t]}^p \zeta\left(\frac{2}{p}\right)^p \right)^{1/p} \|x\|_{p,[s,t]} \tag{2.5}$$

Corollary 2.8. $f \in C_b^2(E, L(E,F))$, $x \in V_p^T(E)$ のとき

$$f(x_t + \xi) = f(\xi) + \int_0^t (\nabla f)(\xi + x_s) dx_s. \tag{2.6}$$

Corollary の証明．$D = \{0 = t_0 < \cdots t_N = t\}$ を分割とする．

$$\begin{aligned} f(x_t+\xi) - f(\xi) &= \sum_{k=1}^{N} \left(f(x_{t_k}+\xi) - f(x_{t_{k-1}}+\xi) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} (\nabla f)(x_{t_{k-1}}+\xi)(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) + R_f(x;D)_t. \end{aligned} \tag{2.7}$$

ここで

$$\begin{aligned} & R_f(x;D)_t \\ & \quad = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \int_0^1 \left\{ (\nabla f)(\xi + x_{t_{k-1}} + \alpha(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})) - (\nabla f)(\xi + x_{t_{k-1}}) \right\} (x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) d\alpha \right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

ゆえに $|D| \to 0$ のとき

$$|R_f(x;D)_t| \le \|\nabla^2 f\|_\infty^2 \sum_{k=1}^{N} |x_{t_k} - x_{t_{k-1}}|^2 \le \|\nabla^2 f\|_\infty \sup_k |x_{t_k} - x_{t_{k-1}}|^{2-p} \|x\|_p^p \to 0. \tag{2.9}$$

□

$x \in C_T(E)$ に対し $((\theta_s)x)_t = x_{t+s} - x_s$ と定義すると $\theta_s x \in C_{T-s}(E)$ である．また

$$I(Y,x)_{s,t} = I\left(Y_{s+\cdot}, (\theta_s x)\right)_{0,t-s}. \tag{2.10}$$

したがって Theorem 2.6 は $s = 0, t = T$ の場合に証明すれば十分である．これを証明するため control function というものを導入する．$0 \le s \le t \le T$ に対して

$$\omega(s,t) = \left(\frac{\|x\|_{p,[s,t]}}{\|x\|_p} \right)^p + \left(\frac{\|Y\|_{p,[s,t]}}{\|Y\|_p} \right)^p$$

と定める．ただし $\|x\|_p = 0$ のときは $\dfrac{\|x\|_{p,[s,t]}}{\|x\|_p} \equiv 0$ などと定義する．このとき

Lemma 2.9. (1)

$$|x_t - x_s| \le \|x\|_p \omega(s,t)^{1/p} \tag{2.11}$$

$$|Y_t - Y_s| \le \|Y\|_p \omega(s,t)^{1/p}. \tag{2.12}$$

(2) ω は *super-additivity* (優加法性)

$$\text{任意の } 0 \le s < t < u \le T \text{ に対して} \quad \omega(s,t) + \omega(t,u) \le \omega(s,u) \tag{2.13}$$

をみたす.
(3) $(s,t) \to \omega(s,t)$ は $\Delta_T = \{(s,t) \mid 0 \le s \le t \le T\}$ 上の連続関数である．特に

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup \{\omega(s,t) \mid 0 \le s \le t \le T, \quad 0 \le t - s \le \varepsilon\} = 0. \tag{2.14}$$

Proof. (1), (2) は定義からわかる．(3) は $\|x\|_p = 1$ の場合に示せば十分．証明についてはLemma 13.2 を見よ． □

ここで次の補題を用意する．

Lemma 2.10. $N \geq 2$ を自然数とする．分割 $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ に対して分点 t_l で

$$\omega(t_{l-1}, t_{l+1}) \leq \frac{2\omega(s,t)}{N-1} \tag{2.15}$$

をみたすものがある．

Proof.

$$\begin{aligned}(N-1) \min_{1 \leq l \leq N-1} \omega(t_{l-1}, t_{l+1}) &\leq \sum_{l=1}^{N-1} \omega(t_{l-1}, t_{l+1}) \\ &= \sum_{j \geq 0, 2j+2 \leq N} \omega(t_{2j}, t_{2j+2}) + \sum_{l \geq 0, 2l+3 \leq N} \omega(t_{2l+1}, t_{2l+3}) \\ &\leq 2\omega(s,t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

□

Lemma 2.11. t_l $(1 \leq l \leq N-1)$ を D の分点の一つとすると

$$I(Y,x;D)_{s,t} - I(Y,x;D \setminus \{t_l\})_{s,t} = \left(Y_{t_l} - Y_{t_{l-1}}\right)(x_{t_{l+1}} - x_{t_l}). \tag{2.17}$$

t_l が *Lemma* 2.10 をみたす点とすると

$$|I(Y,x;D)_{s,t} - I(Y,x;D \setminus \{t_l\})_{s,t}| \leq \|Y\|_p \|x\|_p \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-1}\right)^{2/p}. \tag{2.18}$$

Lemma 2.12.

$$|I(Y,x;D)_{s,t} - Y_s(x_t - x_s)| \leq 2^{2/p} \|Y\|_p \|x\|_p \zeta\left(\frac{2}{p}\right) \omega(s,t)^{2/p}. \tag{2.19}$$

Proof. D から Lemma 2.10 をみたすように順番に選んで分点を除いて得られる分割の列を

$$D_1, D_2, \ldots, D_{(N-1)} = \{s = t_0 < t_N = t\} \tag{2.20}$$

とする．このとき Lemma 2.11 より

$$|I(Y,x;D_{k-1})_{s,t} - I(Y,x;D_k)| \leq \|Y\|_p \|x\|_p \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k}\right)^{2/p}. \tag{2.21}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
|I(Y,x;D)_{s,t}-Y_s(x_t-x_s)| &\le \sum_{k=1}^{N-1}|I(Y,x;D_{k-1})_{s,t}-I(Y,x;D_k)| \\
&\le \sum_{k=1}^{N-1}\|Y\|_p\|x\|_p\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k}\right)^{2/p} \\
&\le 2^{2/p}\|Y\|_p\|x\|_p\zeta\left(\frac{2}{p}\right)\omega(s,t)^{2/p}. \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

□

Theorem 2.6 の証明. まず極限の存在を示す. $D=\{s=t_0<\cdots<t_N=t\}$ とする. D' を D の細分とし D' の $[t_{i-1},t_i]$ における分割を

$$
D(i)=\{t_{i-1}=s_0^i<\cdots<s_{n(i)}^i=t_i\} \qquad 1\le i\le N
$$

とする. 定義から

$$
\begin{aligned}
&I(Y,x;D')_{s,t}-I(Y,x;D)_{s,t} \\
&\quad=\sum_{i=1}^{N}\bigl(I(Y,x;D(i))_{t_{i-1},t_i}-Y_{t_{i-1}}(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})\bigr) \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

だから Lemma 2.12 と (2.14) を用い

$$
\begin{aligned}
&\bigl|I(Y,x;D')_{s,t}-I(Y,x;D)_{s,t}\bigr| \\
&\quad\le\sum_{i=1}^{N}2^{2/p}\|Y\|_p\|x\|_p\zeta\left(\frac{2}{p}\right)\omega(t_{i-1},t_i)^{2/p} \\
&\quad\le\max_{1\le i\le N}\omega(t_{i-1},t_i)^{(2/p)-1}2^{2/p}\|Y\|_p\|x\|_p\zeta\left(\frac{2}{p}\right)\omega(s,t)\to 0\ \ \text{as } |D|\to 0. \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

これで極限の存在が示された.

評価を示す. Lemma 2.12 より

$$
|I(Y,x)_{s,t}| \le |Y_s(x_t-x_s)|+2^{2/p}\|Y\|_p\|x\|_p\zeta\left(\frac{2}{p}\right)\omega(s,t)^{2/p}. \qquad (2.25)
$$

$D=\{0=t_0<\cdots<t_N=T\}$ を分割とすると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}|I(Y,x)_{t_{i-1},t_i}|^p \\
&\quad\le 2^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{N}|Y_{t_{i-1}}|^p|x_{t_i}-x_{t_{i-1}}|^p+\sum_{i=1}^{N}2^2\|Y\|_p^p\|x\|_p^p\zeta\left(\frac{2}{p}\right)^p\omega(t_{i-1},t_i)^2\right) \\
&\quad\le 2^{p-1}\left(\|Y\|_\infty^p\|x\|_p^p+4\|Y\|_p^p\|x\|_p^p\zeta\left(\frac{2}{p}\right)^p\max_{1\le i\le N}\omega(t_{i-1},t_i)\sum_{i=1}^{N}\omega(t_{i-1},t_i)\right) \\
&\quad\le 2^{p-1}\left(\|Y\|_\infty^p\|x\|_p^p+4\|Y\|_p^p\|x\|_p^p\zeta\left(\frac{2}{p}\right)^p\omega(0,T)^2\right). \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

ここで ω の super-additivity を用いた．$\omega(0,T)=2$ だから示された． $\square$

Theorem 2.13. $f\in C_b^1(G,L(E,F))$ とする．$x\in V_T^p(E), y,z\in V_T^p(G)$ のとき

$$\begin{aligned}&\|I_f(y,x)-I_f(z,x)\|_{p,[s,t]}\\&\quad\le B_1(p)(\|\nabla f\|_\infty^p+\|\nabla^2 f\|_\infty^p)^{1/p}\left(1+\|y\|_{p,[0,t]}^p+\|z\|_{p,[0,t]}^p\right)^{1/p}\|y-z\|_{p,[0,t]}\|x\|_{p,[s,t]}\end{aligned}\tag{2.27}$$

$B_1(p)$ は p にのみ依存する定数.

この定理では

$$\begin{aligned}&\|I_f(y,x)-I_f(z,x)\|_{p,[s,t]}\\&\quad\le B_1(p)(\|\nabla f\|_\infty^p+\|\nabla^2 f\|_\infty^p)^{1/p}\left(1+\|y\|_{p,[s,t]}^p+\|z\|_{p,[s,t]}^p\right)^{1/p}\|y-z\|_{p,[s,t]}\|x\|_{p,[s,t]}\end{aligned}\tag{2.28}$$

は成立しない．なぜなら

$$I_f(y,x)_{s,t}-I_f(z,x)_{s,t}=\int_0^{t-s}\left(f(y_s+(\theta_s y)_u)-f(z_s+(\theta_s z)_u)\right)d(\theta_s x)_u$$

のように y_s,z_s のずれがあり y_s-z_s の評価が必要となるからであり $[s,t]$ における局所的な量だけでは評価できないのである.

Proof. $Y_t=f(y_t)-f(z_t)$ とおく．このときは $Y_0=0$ であることを注意しておく．Y は $L(E,F)$ 値関数である．Y の p-variation norm を $\eta_t=y_t-z_t$ の p-variation norm で評価する．

$$\begin{aligned}Y_t-Y_s&=\int_0^1(\nabla f)(z_t+\alpha\eta_t))(\eta_t)\,d\alpha-\int_0^1(\nabla f)(z_s+\alpha\eta_s))(\eta_s)\,d\alpha\\&=\left(\int_0^1(\nabla f)(z_t+\alpha\eta_t))d\alpha\right)(\eta_t-\eta_s)\\&\quad+\left(\int_0^1\{(\nabla f)(z_t+\alpha\eta_t))-(\nabla f)(z_s+\alpha\eta_s))\}(\eta_s)\right)d\alpha.\end{aligned}\tag{2.29}$$

したがって

$$|Y_t-Y_s|\le\|\nabla f\|_\infty|\eta_t-\eta_s|+\|\nabla^2 f\|_\infty(|z_t-z_s|+|\eta_t-\eta_s|)|\eta_s|.\tag{2.30}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\|Y\|_{p,[s,t]}^p&\le 3^{p-1}\left\{\|\nabla f\|_\infty^p\|\eta\|_{p,[s,t]}^p+\|\nabla^2 f\|_\infty^p\left(\|z\|_{p,[s,t]}^p+\|\eta\|_{p,[s,t]}^p\right)\|\eta\|_{p,[0,t]}^p\right\}\\&\le 3^{p-1}\|\eta\|_{p,[0,t]}^p\left\{\|\nabla f\|_\infty^p+\|\nabla^2 f\|_\infty^p\left(\|z\|_{p,[s,t]}^p+2^{p-1}(\|z\|_{p,[s,t]}^p+\|y\|_{p,[s,t]}^p)\right)\right\}\\&\le 3^{p-1}(2^{p-1}+1)\left(\|\nabla f\|_\infty^p+\|\nabla^2 f\|_\infty^p\right)\left(1+\|y\|_{p,[s,t]}^p+\|z\|_{p,[s,t]}^p\right)\|\eta\|_{p,[0,t]}^p.\end{aligned}\tag{2.31}$$

$$I_f(y,x)_{s,t}-I_f(z,x)_{s,t}=\int_s^t Y_u dx_u\tag{2.32}$$

だから Theorem 2.6 の結果から

$$
\begin{aligned}
\left\|\int_0^{\cdot} Y_s dx_s\right\|_{p,[s,t]} &\le 2^{1-(1/p)}\left(\sup_{s\le u\le t}|Y_u|^p+16\|Y\|_{p,[s,t]}^p\zeta\left(\frac{2}{p}\right)^p\right)^{1/p}\|x\|_{p,[s,t]}\\
&\le 2^{1-(1/p)}\left(1+16\zeta\left(\frac{2}{p}\right)^p\right)^{1/p}\|Y\|_{p,[0,t]}\|x\|_{p,[s,t]}. \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

(2.31), (2.32) より評価が得られる. □

Definition 2.14. $x\in V_T^p(E)$, $f\in C_b^1(F,L(E,F))$, $\xi\in F$ とする. $y=(y_t)\in V_T^p(F)$ $(0\le t\le T)$ が

$$
y_t=\int_0^t f(\xi+y_s)\,dx_s \qquad (2.34)
$$

をみたすとき y は初期値 ξ の x でドライブされた *ODE* (2.34) の解と言う.
(通常の意味では $y_t+\xi$ が解であるが初期値を引きさって考えることにする.)

y が (2.34) をみたすとき

$$
\begin{aligned}
y_t-y_s &= \int_s^t f(\xi+y_u)dx_u\\
&= \int_0^{t-s} f(\xi+y_s+(\theta_s y)_u)\,d(\theta_s x)_u \qquad s\le t\le T. \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

したがって

Proposition 2.15. $y=(y_t)\in V_T^p$ $(0\le t\le T)$ が (2.34) の解とする. このとき任意の $0\le s<T$ に対して $(\theta_s y)_t$ $(0\le t\le T-s)$ は初期値を $\xi+y_s$ とする $(\theta_s x)_t$ $(0\le t\le T-s)$ でドライブされた *ODE* の解である. ここで $(\theta_s x)_u=x_{u+s}-x_s$. *(8.1)* に一意的な解 $y_t(\xi)$ が存在するとする.

$$
Y(t,\xi,x)=y_t+\xi
$$

と定めるとこれは

$$
Y(t+s,\xi,x)=Y(t,Y(s,\xi,x),\theta_s x) \qquad (2.36)
$$

ということを意味する.

次のように解の一意的存在, 解の初期値, ドライビングパス x に対する連続性がわかる.

Theorem 2.16. (1) $f\in C_b^2(F,L(E,F))$, $x\in V_T^p(E)$ とする. *ODE* (2.34) に一意的な解が存在する.
(2) $y(\xi,x)$, $y(\xi,x')$ を $[0,T]$ でのそれぞれ初期値 ξ, ドライビングパスが x,x' の解とする. $\|f\|_\infty$, $\|\nabla f\|_\infty$, $\|\nabla^2 f\|_\infty$ と p にのみ依存する定数 C_i が存在して

$$
\begin{aligned}
&\left\|y(\xi,x)-y(\xi,x')\right\|_{p,[s,t]}\\
&\le C_1\Big(\|x-x'\|_{p,[s,t]}+C_2\|x-x'\|_p\exp\left\{C_3\left(\|x\|_p^p+\|x'\|_p^p\right)\right\}\|x\|_{p,[s,t]}\Big)\\
&\qquad\times\left(1+\|x\|_p^p+\|x'\|_p^p\right)^{1-(1/p)}. \qquad (2.37)
\end{aligned}
$$

(3) $y(\xi, x), y(\eta, x)$ を $[0, T]$ での初期値 ξ, η *driving path* が x の解とすると

$$\|y(\xi,x)-y(\eta,x)\|_{p,[s,t]} \leq C_4 \exp\left(C_5\|x\|_p^p\right)|\xi-\eta|\cdot\|x\|_{p,[s,t]}. \tag{2.38}$$

この定理を証明するためいくつか準備をする．以下 $f \in C_b^2(F, L(E,F))$ と仮定する．

Lemma 2.17 ($y \to I_f(y,x)$ が短時間で縮小写像であること)**.**

$$B_2(f) = \frac{\|f\|_\infty}{16^{1/p}\zeta\left(\frac{2}{p}\right)}, \tag{2.39}$$

$$B_3(f) = \min\left\{\frac{2^{(1/p)-1}16^{-1/p}\zeta\left(\frac{2}{p}\right)^{-1}}{(1+\|\nabla f\|_\infty^p)^{1/p}}, \frac{1}{3B_1(p)\left(\|\nabla f\|_\infty^p+\|\nabla^2 f\|_\infty^p\right)^{1/p}(1+2B_2(f)^p)^{1/p}}\right\} \tag{2.40}$$

と定める．T_1 を

$$\|x\|_{p,[0,T_1]} \leq B_3(f) \tag{2.41}$$

となるように取る．

(1)

$$\|y\|_{p,[0,T_1]} \leq B_2(f) \tag{2.42}$$

をみたせば

$$\|I_f(y,x)\|_{p,[0,T_1]} \leq B_2(f). \tag{2.43}$$

(2)

$$\max\{\|y\|_{p,[0,T_1]}, \|z\|_{p,[0,T_1]}\} \leq B_2(f) \tag{2.44}$$

ならば

$$\|I_f(y,x)-I_f(z,x)\|_{p,[0,T_1]} \leq \frac{1}{3}\|y-z\|_{p,[0,T_1]}. \tag{2.45}$$

Proof.

$$\|x\|_{p,[0,T_1]} \leq \frac{2^{(1/p)-1}16^{-1/p}\zeta\left(\frac{2}{p}\right)^{-1}}{(1+\|\nabla f\|_\infty^p)^{1/p}} \tag{2.46}$$

に注意する．$\|y\|_{p,[0,T_1]} \leq B_2(f)$ とする．Theorem 2.7 より

$$\begin{aligned}\|I_f(y,x)\|_{p,[0,T_1]} &\leq 2^{1-(1/p)}\|x\|_{p,[0,T_1]}\left(\|f\|_\infty^p + 16\|\nabla f\|_\infty^p B_2(f)^p\zeta\left(\frac{2}{p}\right)^p\right)^{1/p} \\ &\leq 2^{1-(1/p)}\|x\|_{p,[0,T_1]}\|f\|_\infty\left(1+\|\nabla f\|_\infty^p\right)^{1/p}.\end{aligned} \tag{2.47}$$

したがって (2.43) が示される．さらに

$$\|x\|_{p,[0,T_1]} \leq \frac{1}{3B_1(p)\left(\|\nabla f\|_\infty^p+\|\nabla^2 f\|_\infty^p\right)^{1/p}(1+2B_2(f)^p)^{1/p}} \tag{2.48}$$

だから Theorem 2.13 より (2.45) の成立が示される． □

Lemma 2.18. (1) $x, x' \in V_T^p(E), y, y' \in V_T^p(F)$ のとき

$$\begin{aligned}
&\|I_f(y,x) - I_f(y',x')\|_{p,[s,t]} \\
&\quad \le B_1(p)(\|\nabla f\|_\infty^p + \|\nabla^2 f\|_\infty^p)^{1/p}\left(1 + \|y\|_{p,[0,t]}^p + \|y'\|_{p,[0,t]}^p\right)^{1/p}\|y - y'\|_{p,[0,t]}\|x\|_{p,[s,t]}. \\
&\quad +2^{1-(1/p)}\left(\|f\|_\infty^p + 16\|\nabla f\|_\infty^p\|y'\|_{p,[s,t]}^p\zeta\left(\frac{2}{p}\right)^p\right)^{1/p}\|x - x'\|_{p,[s,t]}. \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

(2) T_1 を $\|x\|_{p,[0,T_1]} \le B_3(f)$ となるように取る． $y, y' \in V_{T_1}^p(F)$ が

$$\begin{aligned}
\max\left(\|y\|_{p,[0,T_1]}, \|y'\|_{p,[0,T_1]}\right) &\le B_2(f) & (2.50) \\
\|y - y'\|_{p,[0,t]} &\le 3\|f\|_\infty (1 + \|\nabla f\|_\infty^p)^{1/p}\|x - x'\|_{p,[0,t]} \quad 0 \le t \le T_1 & (2.51)
\end{aligned}$$

をみたすとすると

$$\|I_f(y,x) - I_f(y',x')\|_{p,[0,t]} \le 3\|f\|_\infty (1 + \|\nabla f\|_\infty^p)^{1/p}\|x - x'\|_{p,[0,t]} \quad 0 \le t \le T_1. \qquad (2.52)$$

Proof. (1)

$$\|I_f(y,x) - I_f(y',x')\|_{p,[s,t]} \le \|I_f(y,x) - I_f(y',x)\|_{p,[s,t]} + \|I_f(y',x) - I_f(y',x')\|_{p,[s,t]}$$

および Theorem 2.7, Theorem 2.13 (1) から直ちに従う.
(2) (1) の結果と仮定より

$$\begin{aligned}
&\|I_f(y,x) - I_f(y',x')\|_{p,[0,t]} \\
&\quad \le 3B_1(p)\left(\|\nabla f\|_\infty^p + \|\nabla^2 f\|_\infty^p\right)^{1/p}(1 + 2B_2(f)^p)^{1/p}\|f\|_\infty(1 + \|\nabla f\|_\infty^p)^{1/p}\|x\|_{p,[0,t]}\|x - x'\|_{p,[0,t]} \\
&\qquad +2^{1-(1/p)}\|f\|_\infty(1 + \|\nabla f\|_\infty^p)^{1/p}\|x - x'\|_{p,[0,t]}. \qquad (2.53)
\end{aligned}$$

したがって

$$3B_1(p)\left(\|\nabla f\|_\infty^p + \|\nabla^2 f\|_\infty^p\right)^{1/p}(1 + 2B_2(f)^p)^{1/p}\|x\|_{p,[0,t]} \le 1 \qquad (2.54)$$

ならば (2.52) が成立する.

□

Lemma 2.19. $f^\xi(\cdot) = f(\xi + \cdot)$ と定める.
(1) 任意の $0 \le s \le t \le T$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|I_{f^\xi}(y,x) - I_{f^\eta}(z,x)\|_{p,[s,t]} \\
&\quad \le 2^{1-(1/p)}\left(\|\nabla f\|_\infty^p + 16\|\nabla^2 f\|_\infty^p\|y\|_{p,[s,t]}^p\zeta\left(\frac{2}{p}\right)^p\right)^{1/p}|\xi - \eta| \cdot \|x\|_{p,[s,t]} \\
&\qquad +B_1(p)(\|\nabla f\|_\infty^p + \|\nabla^2 f\|_\infty^p)^{1/p}\left(1 + \|y\|_{p,[0,t]}^p + \|z\|_{p,[0,t]}^p\right)^{1/p}\|y - z\|_{p,[0,t]}\|x\|_{p,[s,t]}. \\
&\qquad\qquad (2.55)
\end{aligned}$$

(2)

$$B_4(f) \quad = \quad 2^{1-(1/p)}\Big\{\|\nabla f\|_\infty^p + \|\nabla^2 f\|_\infty^p \|f\|_\infty^p\Big\}^{1/p} \tag{2.56}$$

と定める．T_1 を

$$\|x\|_{p,[0,T_1]} \le B_3(f) \tag{2.57}$$

となるように取る．$y, z \in V_{T_1}^p(F)$ が

$$\max\{\|y\|_{p,[0,T_1]}, \|z\|_{p,[0,T_1]}\} \le B_2(f) \tag{2.58}$$

と

$$\|y - z\|_{p,[s,t]} \quad \le \quad 2B_4(f)|\xi - \eta|\|x\|_{p,[s,t]} \quad 0 \le s \le t \le T_1 \tag{2.59}$$

をみたすとする．このとき

$$\|I_{f^\xi}(y,x) - I_{f^\eta}(z,x)\|_{p,[s,t]} \quad \le \quad 2B_4(f)|\xi - \eta|\|x\|_{p,[s,t]} \qquad 0 \le s \le t \le T_1. \tag{2.60}$$

Proof. (1)

$$\begin{aligned} &\|I_{f^\xi}(y,x) - I_{f^\eta}(z,x)\|_{p,[s,t]} \\ &\quad \le \|I_{f^\xi}(y,x) - I_{f^\eta}(y,x)\|_{p,[s,t]} + \|I_{f^\eta}(y,x) - I_{f^\eta}(z,x)\|_{p,[s,t]}. \end{aligned} \tag{2.61}$$

ここで

$$f^\xi(y_u) - f^\eta(y_u) = \int_0^1 ((\nabla f)(\eta + \alpha(\xi - \eta) + y_u), \xi - \eta)\, d\alpha$$

より $\|f^\xi(y.) - f^\eta(y.)\|_\infty \le \|\nabla f\|_\infty |\xi - \eta|$ かつ

$$\|f^\xi(y.) - f^\eta(y.)\|_{p,[s,t]} \le \|\nabla^2 f\|_\infty |\xi - \eta| \|y\|_{p,[s,t]}. \tag{2.62}$$

したがって Theorem 2.6 より

$$\begin{aligned} &\|I_{f^\xi}(y,x) - I_{f^\eta}(y,x)\|_{p,[s,t]} \\ &\quad \le 2^{1-(1/p)}\left(\|\nabla f\|_\infty^p + 16\|\nabla^2 f\|_\infty^p \|y\|_{p,[s,t]}^p \zeta\left(\frac{2}{p}\right)^p\right)^{1/p} \|x\|_{p,[s,t]}|\xi - \eta|. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Theorem 2.13 を用いて $\|I_{f^\eta}(y,x) - I_{f^\eta}(z,x)\|_{p,[0,t]}$ を評価して結論が得られる．
(2) (1) で得られた評価から直ちに従う． □

まず短時間での解の存在・連続性を示す.

Proposition 2.20. $\xi, \eta \in F$, $x, x' \in V_T^p(E)$ とする．T_1 を

$$T_1 = \sup\left\{t > 0 \;\middle|\; \|x\|_{p,[0,t]}^p + \|x'\|_{p,[0,t]}^p \le B_3(f)^p\right\}. \tag{2.64}$$

と定める．
(1) $[0,T_1]$ で解 $y(\xi,x)_t, y(\eta,x)_t, y(\xi,x')_t$ $(0\le t\le T_1)$ が一意的に存在する．
(2)

$$
\begin{aligned}
\max\left(\|y(\xi,x)\|_{p,[0,T_1]}, \|y(\eta,x)\|_{p,[0,T_1]}\right) &\le B_2(f) && (2.65)\\
\|y(\xi,x)-y(\eta,x)\|_{p,[s,t]} &\le 2B_4(f)|\xi-\eta|\|x\|_{p,[s,t]} \quad 0\le s\le t\le T_1 && (2.66)
\end{aligned}
$$

が成立する．
(3)

$$
\|y(\xi,x)-y(\xi,x')\|_{p,[0,t]} \le 3\|f\|_\infty \left(1+\|\nabla f\|_\infty^p\right)^{1/p} \|x-x'\|_{p,[0,t]} \qquad 0\le t\le T_1 \qquad (2.67)
$$

が成立する．

$$
\begin{aligned}
B_5(f) &= 3\|f\|_\infty B_1(p)\left(\|\nabla f\|_\infty^p+\|\nabla^2 f\|_\infty^p\right)^{1/p}\left(1+2B_2(f)^p\right)^{1/p}(1+\|\nabla f\|_\infty^p)^{1/p}, && (2.68)\\
B_6(f) &= 2^{1-(1/p)}\|f\|_\infty \left(1+\|\nabla f\|_\infty^p\right)^{1/p} && (2.69)
\end{aligned}
$$

と定めると

$$
\begin{aligned}
&\|y(\xi,x)-y(\xi,x')\|_{p,[s,t]}\\
&\quad\le B_5(f)\|x-x'\|_{p,[0,t]}\|x\|_{p,[s,t]}+B_6(f)\|x-x'\|_{p,[s,t]} \qquad 0\le s\le t\le T_1. \qquad (2.70)
\end{aligned}
$$

Proof. (1) $[0,T_1]$ で初期値を ξ とする一意的な解の存在を示す．$y(0)\equiv 0$ と定め

$$
y(n)_t=\int_0^t f(\xi+y(n-1)_s)dx_s
$$

と帰納的に定義する．Lemma 2.17 より

$$
\begin{aligned}
\|y(n)\|_{p,[0,T_1]} &\le B_2(f) \qquad n\ge 0 && (2.71)\\
\|y(n+1)-y(n)\|_{p,[0,T_1]} &\le \frac{1}{3}\|y(n)-y(n-1)\|_{p,[0,T_1]}\\
&\le \left(\frac{1}{3}\right)^n \|y(1)-y(0)\|_{p,[0,T_1]} \qquad n\ge 1. && (2.72)
\end{aligned}
$$

極限 $y(\infty):=\lim_{n\to\infty} y(n)$ in $V^p_{T_1}(F)$ が存在するが Theorem 2.13 より $y(\infty)_t$ $(0\le t\le T_1)$ が (2.34) の解であることもわかる．時間区間 $[0,T']$ $T'\le T_1$ で解 $z\in V^p_{T'}(F)$ が存在したとする．$T''\le \min(T_1,T')$ を $\|z\|_{p,[0,T'']}\le B_2(f)$ となるように取ると Lemma 2.17 (2) より

$$
\|y(\infty)-z\|_{p,[0,T'']}\le \frac{1}{3}\|y(\infty)-z\|_{p,[0,T'']}. \qquad (2.73)
$$

したがって $y(\infty)_t=z_t$ $(0\le t\le T'')$．$\theta_{T''}y(\infty)_t$, $\theta_{T''}z_t$ はともに $\xi+y(\infty)_{T''}$ を初期値とする解であることからこの議論を繰り返し適用すると T' まで $y(\infty)$ と z が一致することがわかる．有限回で T' に達するのは $z\in V^p_{T'}(F)$ であることから従う．これで $y(\xi,x)_t, y(\eta,x)_t, y(\xi,x')_t$ $(0\le t\le T_1)$ が一意的に存在することが言えた．

(2) (1) に現れた近似解 $y(n)$ を $y(n,\xi)$ などと書くことにする．$y(n,\xi), y(n,\eta)$ は (2.58), (2.59) をみたす．したがって $n\to\infty$ とし Theorem 2.13 を適用すれば (2) が得られる．
(3) $y(n,\xi,x), y(n,\xi,x')$ は Lemma 2.18 (2) の条件をみたすことから

$$\|I_{f^\xi}(y(n,\xi,x),x)-I_{f^\xi}(y(n,\xi,x'),x')\|_{p,[0,t]}\le 3\|f\|_\infty(1+\|\nabla f\|_\infty^p)^{1/p}\|x-x'\|_{p,[0,t]}\ 0\le t\le T_1. \tag{2.74}$$

この式で $n\to\infty$ として (2.67) が得られる．(2.70) は (2.67) と Lemma 2.18 (1) から従う． □

Theorem 2.16 (1) の証明．$[0,T]$ での解の存在を示す．$[0,T_1]$ で解の存在が証明された．T_2 を

$$T_2=T_1+\sup\left\{t\le T-T_1 \mid \|\theta_{T_1}x\|_{p,[0,t]}^p+\|\theta_{T_1}x'\|_{p,[0,t]}^p\le B_3(f)^p\right\} \tag{2.75}$$

となるように T_2 を取り, 同様にして時間列 $T_3, T_4, \ldots,$ を取る．この操作は有限回, N 回で終わる．$T_N=T$ である．各時間間隔で解が構成されるのでこれを接続していけば解の存在が示される．具体的には $[0,T_k]$ まで解 y が構成されたときこの y を $[T_k,T_{k+1}]$ の範囲へ初期値 $\xi+y_{T_k}$, ドライビングパス $\theta_{T_k}x$ の解 $y(\xi+y_{T_k},\theta_{T_k}x)$ $(0\le t\le T_{k+1}-T_k)$ を用いて

$$y_t=y_{T_k}+y(\xi+y_{T_k},\theta_{T_k}x)_{t-T_k}$$

と連続的に拡張すると y は $[0,T_{k+1}]$ での (2.34) の解である．この操作を繰り返すことによりすべての時間区間で解が存在することが示される．$[0,T]$ での一意性は各小区間 $[T_{k-1},T_k]$ 上での一意性から従う． □

Theorem 2.16 (2) の証明．

$$N-1\le\frac{\|x\|_p^p+\|x'\|_p^p}{B_3(f)^p} \tag{2.76}$$

と評価される．これは

$$\sum_{k=1}^N\left(\|x\|_{p,[T_{k-1},T_k]}^p+\|x'\|_{p,[T_{k-1},T_k]}^p\right)\le\|x\|_p^p+\|x'\|_p^p,\qquad T_0\equiv 0$$

および

$$\|x\|_{p,[T_{k-1},T_k]}^p+\|x'\|_{p,[T_{k-1},T_k]}^p=B_3(f)^p\quad 1\le i\le N-1$$

から従う．以下 $|y(\xi,x)_{T_k}-y(\xi,x')_{T_k}|$ $(1\le k\le N)$ を評価するため次の量を導入する．E 上のパス z_t $(z_0=0, 0\le t\le T_k)$ が x,x' を各小区間 $[T_i,T_{i+1}]$ でつないで得られるパスであるとは $1\le l\le k$ に対して $\left\{(\theta_{T_{l-1}}z)_t \mid 0\le t\le T_l-T_{l-1}\right\}$ が

$$\left\{(\theta_{T_{l-1}}x)_t \mid 0\le t\le T_l-T_{l-1}\right\}\ \text{かまたは}\ \left\{(\theta_{T_{l-1}}x')_t \mid 0\le t\le T_l-T_{l-1}\right\}$$

と一致するときに言うことにする．$a_0=0$ とし $k\ge 1$ に対して

$$a_k\ =\ \max\left\{|y(\xi,z)_{T_k}-y(\xi,z')_{T_k}|\ \middle|\ z,\ z'\ \text{は}\ x,x'\ \text{をつないで得られるパス全体を動く}\right\} \tag{2.77}$$

と定めると明らかに

$$|y(\xi,x)_{T_k}-y(\xi,x')_{T_k}|\le a_k \qquad 1\le k\le N.$$

$$y(\xi,z)_{T_{k+1}}-y(\xi,z)_{T_k}=y\left(\xi+y(\xi,z)_{T_k},(\theta_{T_k})z\right)_{T_{k+1}-T_k} \tag{2.78}$$

だから適当に z,z' を取ると

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\le \left|y(\xi,z)_{T_k}-y(\xi,z')_{T_k}\right| \\
&\quad+\left|y\left(\xi+y(\xi,z)_{T_k},(\theta_{T_k})z\right)_{T_{k+1}-T_k}-y\left(\xi+y(\xi,z')_{T_k},(\theta_{T_k})z\right)_{T_{k+1}-T_k}\right| \\
&\quad+\left|y\left(\xi+y(\xi,z')_{T_k},(\theta_{T_k})z\right)_{T_{k+1}-T_k}-y\left(\xi+y(\xi,z')_{T_k},(\theta_{T_k})z'\right)_{T_{k+1}-T_k}\right| \\
&\le a_k+2B_3(f)B_4(f)a_k+3\|f\|_\infty\left(1+\|\nabla f\|_\infty^p\right)^{1/p}\|x-x'\|_{p,[T_k,T_{k+1}]}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

したがって $B_7(f)=2B_3(f)B_4(f)$ と定めると

$$a_{k+1} \le 3(k+1)\|f\|_\infty\left(1+\|\nabla f\|_\infty^p\right)^{1/p}\|x-x'\|_{p,[0,T_{k+1}]}+B_7(f)\sum_{j=0}^{k}a_j. \tag{2.80}$$

従って

$$a_{k+1} \le 3(k+1)\|f\|_\infty\left(1+\|\nabla f\|_\infty^p\right)^{1/p}\|x-x'\|_{p,[0,T_{k+1}]}\exp\left(kB_7(f)\right). \tag{2.81}$$

$T_k\le s\le t\le T_{k+1}$ とする. $\theta_{T_k}y(\xi,x)_u$ $(0\le u\le T_{k+1}-T_k)$ は初期値 $\xi+y(\xi,x)_{T_k}$, driving path $\theta_{T_k}x$ の解であるから

$$\begin{aligned}
&\|y(\xi,x)-y(\xi,x')\|_{p,[s,t]} \\
&\quad=\|\theta_{T_k}y(\xi,x)-\theta_{T_k}y(\xi,x')\|_{p,[s-T_k,t-T_k]} \\
&\quad=\left\|y(\xi+y(\xi,x)_{T_k},\theta_{T_k}x)-y(\xi+y(\xi,x')_{T_k},\theta_{T_k}x')\right\|_{p,[s-T_k,t-T_k]} \\
&\quad\le\left\|y(\xi+y(\xi,x)_{T_k},\theta_{T_k}x)-y(\xi+y(\xi,x)_{T_k},\theta_{T_k}x')\right\|_{p,[s-T_k,t-T_k]} \\
&\qquad+\left\|y(\xi+y(\xi,x)_{T_k},\theta_{T_k}x')-y(\xi+y(\xi,x')_{T_k},\theta_{T_k}x')\right\|_{p,[s-T_k,t-T_k]} \\
&\quad\le B_5(f)\|\theta_{T_k}x-\theta_{T_k}x'\|_{p,[0,t-T_k]}\|\theta_{T_k}x\|_{p,[s-T_k,t-T_k]}+B_6(f)\|\theta_{T_k}x-\theta_{T_k}x'\|_{p,[s-T_k,t-T_k]} \\
&\qquad\quad+6B_4(f)k\left(1+\|\nabla f\|_\infty^p\right)^{1/p}\|f\|_\infty\|x-x'\|_{p,[0,T_k]}\exp\left((k-1)B_7(f)\right)\|\theta_{T_k}x'\|_{p,[s-T_k,t-T_k]}. \\
&\quad\le B_5(f)\|x-x'\|_{p,[T_k,t]}\|x\|_{p,[s,t]}+B_6(f)\|x-x'\|_{p,[s,t]} \\
&\qquad\quad+6B_4(f)k\left(1+\|\nabla f\|_\infty^p\right)^{1/p}\|f\|_\infty\|x-x'\|_{p,[0,T_k]}\exp\left((k-1)B_7(f)\right)\|x'\|_{p,[s,t]}.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

従って $0\le s\le t\le T$ に対しては Remark 2.2 (3) を用い

$$\begin{aligned}
\left\|y(\xi,x)-y(\xi,x')\right\|_{p,[s,t]}^p \le (3N)^{p-1}\Bigg[&B_5(f)^p\|x-x'\|_p^p\|x\|_{p,[s,t]}^p+B_6(f)^p\|x-x'\|_{p,[s,t]}^p \\
&+6^pB_4(f)^p\left(\frac{\|x\|_p^p+\|x'\|_p^p}{B_3(f)^p}\right)^p\|f\|_\infty^p\left(1+\|\nabla f\|_\infty^p\right) \\
&\times\|x-x'\|_p^p\exp\left\{pB_7(f)\left(\frac{\|x\|_p^p+\|x'\|_p^p}{B_3(f)^p}\right)\right\}\|x'\|_{p,[s,t]}^p\Bigg].
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Theorem 2.16 (3) も Proposition 2.20 (2) の評価を用いてまず $|y(\xi,x)_{T_k} - y(\eta,x)_{T_k}|$ を帰納的に評価して上記 (2) と同様にすればよい. $\square$

3 The case of $2 \le p < 3$

ここでは $G = E$ とし $x \in V_T^p(E)$, $f \in C_b^1(E, L(E,F))$ とする. $I_{f,\xi}(x,x)_{s,t} = \int_s^t f(\xi + x_u)dx_u$ を簡単に $I_{f,\xi}(x)_{s,t}$ と書くことにする. $F = \mathbb{R}$ の場合が 1-form の積分, 線積分であり, これは線積分の拡張にあたる. $1 \le p < 2$ のとき線積分の汎関数 $x \to I_{f,\xi}(x)$ は $V_T^p(E)$ から $V_T^p(F)$ への連続写像であることが示された. これは

$$x \in V_T^1(E) \to I_f(x) \in V_T^1(F)$$

という汎関数が p-variation $(1 \le p < 2)$ の位相で連続な汎関数である.

と見ることもできる. しかし $p \ge 2$ のときはそうではない. 例えば $x_t = (x_1^1, x_t^2) \in V_{2\pi}^1(\mathbb{R}^2)$ のとき

$$I(x)_{0,2\pi} = \int_0^{2\pi} x_u^1 dx_u^2$$

とすると $x \in V_{2\pi}^1(\mathbb{R}^2) \to I(x)_{0,2\pi}$ は $V_1^p(\mathbb{R}^2)$ $(p > 2)$ の位相では連続ではない. 例えば

$$x^1(n)_t = \frac{\cos n^2 t - 1}{n}, \quad x^2(n)_t = \frac{\sin n^2 t}{n} \tag{3.1}$$

とおくと $\lim_{n\to\infty} \|x(n)\|_p = 0$ だが

$$\lim_{n\to\infty} I(x(n))_{0,2\pi} = \pi.$$

しかしパス x から定まる $\bar{x}^2$ という量をあわせて考えると連続な汎関数であると言える.

Definition 3.1. $x \in V_T^1(E)$ に対して $\Delta_T = \{(s,t) \mid 0 \le s \le t \le T\}$ で定義された連続写像

$$\bar{x}_{s,t}^1 = \sum_{i=1}^d \bar{x}_{s,t}^{1,i} e_i := x_t - x_s = \sum_{i=1}^d (x_t^i - x_s^i) e_i \in E \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{s,t}^2 &= \sum_{1\le i,j\le d} \bar{x}_{s,t}^{2,ij} e_i \otimes e_j \\ &:= \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u \\ &= \sum_{1\le i,j\le d} \left(\int_s^t (x_u^i - x_s^i) dx_u^j \right) e_i \otimes e_j \in E \otimes E, \end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで $e_i = {}^t(0,\ldots,\overset{i}{1},\ldots,0)$. $E \otimes E$ はテンソル積. $\{e_i \otimes e_j\}_{1\le i,j\le d}$ が正規直交系である.

$\bar{x}^1, \bar{x}^2$ の p-variation norm を定めよう.

Definition 3.2. $(V, \|\ \|)$ をノルム空間とする．$q > 0$ とする．連続写像 $\psi : \Delta_T \to V$ に対して

$$\|\psi\|_q = \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^N |\psi_{t_{i-1},t_i}|^q \right\}^{1/q} \tag{3.4}$$

と定める．$D := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T\}$ は $[0, T]$ の分割である．$\psi = \bar{x}^1, \bar{x}^2$ が典型的な例である．$\|\bar{x}^1\|_p$ は x の *p-variation norm* $\|x\|_p$ と同じである．また次のように定義する．

$$\|\psi\|_{q,[s,t]} = \sup_D \Big\{ \{\sum_{i=1}^N |\psi_{t_{i-1},t_i}|^q\}^{1/q} \ \Big|\ D = \{s = t_0 < \ldots < t_N = t\} \Big\}. \tag{3.5}$$

p-variation norm は $p < 1$ のときパスに対してはあまり意味がない．というのは以下の通り．$x \in PC_T^1(E)$ とする．x が定数でなければ $\|\bar{x}^1\|_p = +\infty \quad (0 < p < 1)$.

後でもっと正確な statement を述べるが次のような連続性定理が証明できる：

$f \in C_b^3(E, L(E, F))$, $2 \le p < 3$ とする．$x(n), x \in V_T^1(E)$ について

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^2 \|\overline{x(n)}^i - \bar{x}^i\|_{p/i} = 0$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} I_f(x(n))_{s,t} = I_f(x)_{s,t} \qquad 0 \le s \le t \le T.$$

これがどのように証明されるかを説明し次に rough path の概念を導入する．

$$\tilde{J}_f(x)_{s,t} = f(x_s)\bar{x}^1_{s,t}, \tag{3.6}$$

$$\tilde{I}_f(x)_{s,t} = f(x_s)\bar{x}^1_{s,t} + (\nabla f)(x_s)\left(\bar{x}^2_{s,t}\right). \tag{3.7}$$

ここで

$$[(\nabla f)(x)(a \otimes b)]^i = \sum_{1\le j,k\le d} \frac{\partial f^i_j}{\partial x_k}(x) a^k b^j, \tag{3.8}$$

$$\left[(\nabla f)(x_s)(\bar{x}^2_{s,t})\right]^i = \sum_{1\le j,k\le d} \frac{\partial f^i_j}{\partial x_k}(x_s) \int_s^t (x^k_u - x^k_s) dx^j_u \tag{3.9}$$

$$\left[(\nabla^2 f)(x)(a \otimes b \otimes c)\right]^i = \sum_{1\le k,l\le d} \frac{\partial^2 f^i_j}{\partial x_l \partial x_k}(x) a^l b^k c^j, \tag{3.10}$$

また $a = \sum_{i=1}^d a^i e_i, b = \sum_{i=1}^d b^i e_i, c = \sum_{i=1}^d c^i e_i$.

$\tilde{J}_f(x)_{s,t}, \tilde{I}_f(x)_{s,t}$ は $I_f(x)_{s,t}$ のそれぞれ第一次近似，第二次近似と言える．というのは

$$
\begin{aligned}
I_f(x)_{s,t} &= \int_s^t \left[f(x_s) + \left\{\int_0^1 (\nabla f)(x_s + \alpha(x_u - x_s))d\alpha\right\}(x_u - x_s)\right] dx_u \\
&= \int_s^t \left[f(x_s) + (\nabla f)(x_s)(x_u - x_s)\right] dx_u \\
&\quad + \int_s^t \left\{\int_0^1 (\nabla f)(x_s + \alpha(x_u - x_s))d\alpha - (\nabla f)(x_s)\right\}(x_u - x_s)\, dx_u \\
&= \tilde{I}_f(x)_{s,t} + R(x)_{s,t}.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&R(x)_{s,t} \\
&= \int_s^t \left\{\int_0^1 \left(\int_0^\alpha (\nabla^2 f)(x_s + \beta(x_u - x_s))d\beta\right) d\alpha\right\} \left[(x_u - x_s) \otimes (x_u - x_s) \otimes dx_u\right].
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Remainder term は

$$
|R(x)_{s,t}| \le \|\nabla^2 f\|_\infty \max_{s \le u \le t} |x_u - x_s|^2 \|x\|_{1,[s,t]}. \tag{3.13}
$$

のように評価されるからである．$D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ に対して

$$
\tilde{J}_f(x; D) = \sum_{i=1}^N \tilde{J}_f(x)_{t_{i-1},t_i} \tag{3.14}
$$

$$
\tilde{I}_f(x; D)_{s,t} = \sum_{i=1}^N \tilde{I}_f(x)_{t_{i-1},t_i} \tag{3.15}
$$

と定めると明らかに

$$
I_f(x)_{s,t} = \sum_{i=1}^N I_f(x)_{t_{i-1},t_i} \tag{3.16}
$$

$$
I_f(x)_{s,t} = \lim_{|D| \to 0} \tilde{J}_f(x; D)_{s,t} \tag{3.17}
$$

$$
I_f(x)_{s,t} = \lim_{|D| \to 0} \tilde{I}_f(x; D)_{s,t}, \tag{3.18}
$$

$|D| = \max_{1 \le i \le N}(t_i - t_{i-1})$ である．(3.17) は Stieltjes 積分, Young 積分の定義そのもの．(3.18) の積分の近似を用いると上記の連続性定理が証明できるのである．詳しく述べると次のような定理が成立する．

Theorem 3.3. $2 \le p < 3$ とする．$p, \|\nabla^i f\|_\infty$ $(i = 0, 1, 2)$ にのみ依存する定数 C が存在して

$$
\|I_f(x)\|_{p,[s,t]} \le C \sum_{k=1}^3 \left(\|\bar{x}^1\|_{p,[s,t]} + \|\bar{x}^2\|_{p/2,[s,t]}^{1/2}\right)^k \qquad x \in V_T^1(E). \tag{3.19}
$$

Remark 3.4. $x, y \in V_T^1(\mathbb{R})$ とする．$\psi_{s,t} = \int_s^t (y_u - y_s) dx_u$ とおくと $\psi_{s,t} = \int_s^t y_u dx_u - y_s(x_t - x_s)$. $1 \le p < 2$ のとき Theorem 2.6 より

$$\|\psi\|_{p/2} \le C\|x\|_p \|y\|_p.$$

これは $1 \le p < 2$ のとき $\bar{x}^2$ の $p/2$-variation norm は x 自身の p-variation norm で制御できることを示している．より一般に p-rough path $X_{s,t} = (1, X_{s,t}^1, \ldots, X_{s,t}^n)$ $(n \le p < n+1)$ に対して $X_{s,t}^k$ $(k \ge n+1)$ が一意的に定まるという定理 (Theorem 3.1.2 in [21] を参照) はこれの一般化と言える．

Theorem 3.5. $2 \le p < 3$ とする．$x, y \in V_T^1(E)$ とする．

$$\max\left\{\|\bar{x}^1\|_p + \|\bar{x}^2\|_{p/2}, \|\bar{y}^1\|_p + \|\bar{y}^2\|_{p/2}\right\} \le R < \infty \tag{3.20}$$

$$\max\left(\|\bar{x}^1 - \bar{y}^1\|_p, \|\bar{x}^2 - \bar{y}^2\|_{p/2}\right) \le \varepsilon \tag{3.21}$$

とすると

$$\left\|I_f(x) - I_f(y)\right\|_p \le C\varepsilon. \tag{3.22}$$

C は $p, R, \|\nabla^i f\|_\infty$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ にのみ依存する定数.

以下の Theorem 3.6 の証明は後で与える．

Theorem 3.6. $2 \le p < 3$ とする．$\|\bar{x}^1\|_p, \|\bar{x}^2\|_{p/2}$ と p, $\|\nabla^i f\|$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ にのみ依存する定数 C が存在して

$$\|I_{f,\xi}(x) - I_{f,\eta}(x)\|_p \le C'|\xi - \eta|. \tag{3.23}$$

$x, y \in V_T^1(E)$ に対して

$$d_p(x, y) = \max\left(\|\bar{x}^1 - \bar{y}^1\|_p, \|\bar{x}^2 - \bar{y}^2\|_{p/2}\right)$$

と定めるとこれは $V_T^1(E)$ 上の距離を定める．上記定理は

$$(\xi, x)(\in E \times V_T^1(E)) \to I_{f,\xi}(x) \in (V_T^p(E), \|\ \|_p)$$

がこの距離に関して局所 Lipschitz 連続写像であることを示している．

4 確率積分との関連

$\Theta^d = C([0, T] \to \mathbb{R}^d \mid w_0 = 0)$ 上の Wiener measure を μ とする．すなわち μ の下で $X_t(w) = w_t$ は 0 から出発するブラウン運動である．よく知られているように ([30] 参照)

$$\mu\left(w \in \Theta^d \mid \|w\|_2 = \infty, \|w\|_p < \infty \quad \forall p > 2\right) = 1.$$

従って $\int_0^T f(w_t) dw_t$ は Young 積分としては定義できないが Theorem 3.5 を用いてその定義を与えることができる．

$w \in \Theta^d$ とする．$w(n)$ を

(i) $w(n)_{kT/(2^n)} = w_{kT/(2^n)} \quad (0 \le k \le 2^n)$

(ii) $t \to w(n)_t \ ((k-1)T/(2^n) \le t \le kT/(2^n), 1 \le k \le 2^n)$ は線形.

となるように定める．$w(n)$ は w の区分的線形近似 (dyadic polygonal approximation) である．

Theorem 4.1. $w \in \Theta^d$ とする．

$$\tilde{\Theta}^d \quad = \quad \left\{ w \in \Theta^d \;\middle|\; 任意の\ 2 < p \le 3\ に対して\ \lim_{n,m\to\infty} d_p(w(n), w(m)) = 0 \right\} \tag{4.1}$$

と定めると $\mu(\tilde{\Theta}^d) = 1$.

Theorem 3.5 より

$$I_f(w) = \lim_{n\to\infty} I_f(w(n))_{s,t} \qquad \forall w \in \tilde{\Theta}^d \tag{4.2}$$

が存在する．$I_f(w)$ は $\tilde{\Theta}^d$ 上の関数である．

Theorem 4.2. (1)

$$I_f(w)_{s,t} \quad = \quad \int_s^t f(w_u) \circ dw_u \qquad \mu - a.s.\ w \tag{4.3}$$

ここに $\int_s^t f(w_u) \circ dw_u$ は *Stratonovich* 積分である．
(2) $x, y \in \tilde{\Theta}^d$ に対して

$$d_p(x, y) = \lim_{n\to\infty} d_p(x(n), y(n))$$

と定めるとこれは $\tilde{\Theta}^d$ 上の距離を定める．$I_f(w)$ $(w \in \tilde{\Theta}^d)$ はこの距離に関して局所 *Lipschitz* 連続写像である．

Stratonovich 積分は次の極限 (L^2-limit) で定義される：

$$\int_s^t f(w_u) \circ dw_u = \lim_{|D|\to 0} \sum_{i=1}^N \frac{f\left(w_{t_{i-1}}\right) + f\left(w_{t_i}\right)}{2} \left(w_{t_i} - w_{t_{i-1}}\right),$$

$D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ は $[s, t]$ の分割.

5 Theorem 3.3, Theorem 3.5 の証明

定理の証明には Young 積分の所でも用いた control function という概念が用いられる．ここでは一般的な定義を与える．

Definition 5.1. $\omega(\cdot,\cdot) : \Delta_T \to [0, \infty)$ が *control function* であるとは Δ_T 上の連続関数かつ任意の $0 \le s \le t \le u \le T$ に対して次の *super-additivity* が成立するときに言う:

$$\omega(s, t) + \omega(t, u) \le \omega(s, u). \tag{5.1}$$

Remark 5.2. (1) Super-additivity から $\omega(t, t) = 0$ $(\forall t)$.

(2) $\omega(s,t) = C|t-s|$ (C は定数) は control function. ω_1, ω_2 を control function とすると $(\omega_1^r + \omega_2^r)^{1/r}$ $(0 < r \le 1)$ もまた control function. $a \ge 1$ に対して $\omega_1^a + \omega_2^a$ も control function.

(3) $\omega(s,t) = \max\{\omega_1(s,t), \omega_2(s,t)\}$ は control function とは限らない.

Lemma 5.3. (1) $p \ge 1$,$x \in V_T^p(E)$ とする. $\omega(s,t) = \|x\|_{p,[s,t]}^p$ は *control function* かつ

$$|\bar{x}_{s,t}^1| \le \omega(s,t)^{1/p} \quad 0 \le s \le t \le T.$$

(2) $p \ge 2$ とする. $x \in V_T^1(E)$ に対して

$$\omega(s,t) = \|\bar{x}^1\|_{p,[s,t]}^p + \|\bar{x}^2\|_{p/2,[s,t]}^{p/2} \tag{5.2}$$

と定めると *control function* かつ

$$|\bar{x}_{s,t}^1| \le \omega(s,t)^{1/p}, \qquad |\bar{x}_{s,t}^2| \le \omega(s,t)^{2/p}.$$

(3) $p \ge 2$ とする. $x \in V_T^1(E)$ に対して *control function* ω が存在して

$$|\bar{x}_{s,t}^1| \le \omega(s,t)^{1/p}, \quad |\bar{x}_{s,t}^2| \le \omega(s,t)^{2/p} \tag{5.3}$$

とする. このとき任意の $0 \le s \le t \le T$ に対して

$$\|x\|_{p,[s,t]} \le \omega(s,t)^{1/p}, \qquad \|\bar{x}^2\|_{p/2,[s,t]} \le \omega(s,t)^{2/p}.$$

上記の ω はパス x に依存するので ω_x と書くと

$$(\omega_{ax}(s,t))^{1/p} = |a|\omega_x(s,t)^{1/p}$$

となることを注意しておく. $\omega(s,t) = C|t-s|$ のとき (5.3) は $|x_t - x_s| \le (C|t-s|)^{1/p}$ のようにヘルダー連続性を意味する. Lemma 5.3 (1), (2) の関数が control function になることの証明は Lemma 13.2 を見よ.

Control function を用いて Theorem 3.3, Theorem 3.5 に相当する定理を述べる.

Theorem 5.4. $x \in V_T^1(E)$, $f \in C(E, L(E,F))$ とする.
(1) $1 \le p < 2$ とする. *Control function* ω が存在して

$$|\bar{x}_{s,t}^1| \le \omega(s,t)^{1/p}, \qquad 0 \le s \le t \le T \tag{5.4}$$

とすると p, $\|\nabla^i f\|_\infty$ $(0 \le i \le 1)$ にのみ依存する定数 C が存在して

$$|I_f(x)_{s,t}| = \left|\int_s^t f(x_u)dx_u\right| \le C\left(\omega(s,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{2/p}\right). \tag{5.5}$$

(2) $2 \le p < 3$ とする. *Control function* ω が存在して任意の $0 \le s \le t \le T$ に対して

$$|\bar{x}_{s,t}^1| \le \omega(s,t)^{1/p}, \tag{5.6}$$

$$|\bar{x}_{s,t}^2| \le \omega(s,t)^{2/p} \tag{5.7}$$

とする. このとき p, $\|\nabla^i f\|_\infty$ $(0 \le i \le 2)$ にのみ依存する定数 C が存在して

$$|I_f(x)_{s,t}| = \left|\int_s^t f(x_u)dx_u\right| \le C\left(\omega(s,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{2/p} + \omega(s,t)^{3/p}\right). \tag{5.8}$$

Remark 5.5. *Theorem* 5.4 (1) に関して注意を述べる．$\omega(s,t)=\|x\|_{p,[s,t]}^p$ と定めると $|\bar{x}^1_{s,t}|\le\omega(s,t)^{1/p}$ となる．従って

$$|I_f(x)_{s,t}|\le C\left(\|x\|_{p,[s,t]}+\|x\|_{p,[s,t]}^2\right).$$

これは *Theorem* 2.7 と同じ形の評価である．(2) についても (5.2) のように ω を定めることにより *Theorem* 3.3 が従う．$\omega(s,t)=C|t-s|$ の場合を考えれば線積分の関数のヘルダーノルムも評価できることがわかる．

Lemma 5.6 (Chen's identity)**.** $\bar{x}^1_{s,t},\bar{x}^2_{s,t}$ は次の関係式をみたす．任意の $0\le s\le t\le u\le T$ に対して

$$\begin{aligned}\bar{x}^1_{s,u} &= \bar{x}^1_{s,t}+\bar{x}^1_{t,u} &(5.9)\\ \bar{x}^2_{s,u} &= \bar{x}^2_{s,t}+\bar{x}^2_{t,u}+\bar{x}^1_{s,t}\otimes\bar{x}^1_{t,u}. &(5.10)\end{aligned}$$

Proof. (5.9) は自明．(5.10) を示す．

$$\begin{aligned}\bar{x}^2_{s,u} &= \int_s^u (x_r-x_s)\otimes dx_r\\ &= \int_s^t (x_r-x_s)\otimes dx_r+\int_t^u (x_r-x_s)\otimes dx_r\\ &= \int_s^t (x_r-x_s)\otimes dx_r+\int_t^u (x_r-x_t)\otimes dx_r+(x_t-x_s)\otimes(x_u-x_t)\\ &= \bar{x}^2_{s,t}+\bar{x}^2_{t,u}+\bar{x}^1_{s,t}\otimes\bar{x}^1_{t,u}.\end{aligned}$$

□

Proof of Theorem 5.4 (2)*.* $N\ge 2$ とし分割 $D=\{s=t_0<\cdots<t_N=t\}$ を考える．分点 l を (2.15) を満たすように取る．$D_1=D\setminus\{t_l\}$ とおく．$\tilde{I}_f(x;D)_{s,t}-\tilde{I}_f(x;D\setminus\{t_l\})_{s,t}$ を評価する．

$$\tilde{I}_f(x;D)_{s,t}-\tilde{I}_f(x;D\setminus\{t_l\})_{s,t}) = \tilde{I}_f(x)_{t_{l-1},t_l}(x)+\tilde{I}_f(x)_{t_l,t_{l+1}}-\tilde{I}_f(x)_{t_{l-1},t_{l+1}} \qquad (5.11)$$

なので

$$\begin{aligned}\tilde{I}_f(x;D)_{s,t}-\tilde{I}_f(x;D\setminus\{t_l\})_{s,t}) &= f(x_{t_{l-1}})\bar{x}^1_{t_{l-1},t_l}+f(x_{t_l})\bar{x}^1_{t_l,t_{l+1}}-f(x_{t_{l-1}})\bar{x}^1_{t_{l-1},t_{l+1}}\\ &\quad+\nabla f(x_{t_{l-1}})\bar{x}^2_{t_{l-1},t_l}+\nabla f(x_{t_l})\bar{x}^2_{t_l,t_{l+1}}-\nabla f(x_{t_{l-1}})\bar{x}^2_{t_{l-1},t_{l+1}}.\end{aligned} \qquad (5.12)$$

Chen の関係式と平均値の定理を用い

$$\begin{aligned}&f(x_{t_{l-1}})\bar{x}^1_{t_{l-1},t_l}+f(x_{t_l})\bar{x}^1_{t_l,t_{l+1}}-f(x_{t_{l-1}})\bar{x}^1_{t_{l-1},t_{l+1}}\\ &\quad=\left(f(x_{t_l})-f(x_{t_{l-1}})\right)\bar{x}^1_{t_l,t_{l+1}}\\ &\quad=\left[\int_0^1\Big\{(\nabla f)\left(x_{t_{l-1}}+\alpha(x_{t_l}-x_{t_{l-1}})\right)-(\nabla f)(x_{t_{l-1}})\Big\}(\bar{x}^1_{t_{l-1},t_l})d\alpha\right]\bar{x}^1_{t_l,t_{l+1}}\\ &\qquad+\nabla f(x_{t_{l-1}})\bar{x}^1_{t_{l-1},t_l}\otimes\bar{x}^1_{t_l,t_{l+1}}.\end{aligned} \qquad (5.13)$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla f(x_{t_{l-1}})\bar{x}^2_{t_{l-1},t_l} + \nabla f(x_{t_l})\bar{x}^2_{t_l,t_{l+1}} - \nabla f(x_{t_{l-1}})\bar{x}^2_{t_{l-1},t_{l+1}} \\
&\quad = \left(\nabla f(x_{t_l}) - \nabla f(x_{t_{l-1}})\right)\bar{x}^2_{t_l,t_{l+1}} - \nabla f(x_{t_{l-1}})\bar{x}^1_{t_{l-1},t_l} \otimes \bar{x}^1_{t_l,t_{l+1}}
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
&\tilde{I}_f(x;D)_{s,t} - \tilde{I}_f(x;D\setminus\{t_l\})_{s,t}) \\
&= \left[\int_0^1 \Big\{(\nabla f)\left(x_{t_{l-1}} + \alpha(x_{t_l} - x_{t_{l-1}})\right) - (\nabla f)(x_{t_{l-1}})\Big\} d\alpha\right] \bar{x}^1_{t_{l-1},t_l} \otimes \bar{x}^1_{t_l,t_{l+1}} \\
&+ \left((\nabla f)(x_{t_l}) - (\nabla f)(x_{t_{l-1}})\right)\bar{x}^2_{t_l,t_{l+1}} \\
&= R(f,x,t_{l-1},t_l)\left[\bar{x}^1_{t_{l-1},t_l} \otimes \bar{x}^1_{t_{l-1},t_l} \otimes \bar{x}^1_{t_l,t_{l+1}}\right] \\
&+ S(f,x,t_{l-1},t_l)\left[\bar{x}^1_{t_{l-1},t_l} \otimes \bar{x}^2_{t_l,t_{l+1}}\right],
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

ここに

$$
\begin{aligned}
R(f,x,t_{l-1},t_l) &= \int_0^1 \left\{\int_0^\alpha (\nabla^2 f)(x_{t_{l-1}} + \beta\bar{x}^1_{t_{l-1},t_l}) d\beta\right\} d\alpha \\
S(f,x,t_{l-1},t_l) &= \int_0^1 (\nabla^2 f)(x_{t_{l-1}} + \alpha\bar{x}^1_{t_{l-1},t_l}) d\alpha.
\end{aligned}
$$

分点 l に対する仮定から

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_f(x;D)_{s,t} - \tilde{I}_f(x;D\setminus\{t_l\})_{s,t})\right| &\le C\cdot\|\nabla^2 f\|_\infty \Big\{\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-1}\right)^{3/p} \\
&\quad + \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-1}\right)^{1/p}\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-1}\right)^{2/p}\Big\} \\
&\le C\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-1}\right)^{3/p}\|\nabla^2 f\|_\infty.
\end{aligned} \tag{5.16}
$$

同じように D から Lemma 2.10 をみたすように順番に選んで分点を除いて得られる分割の列を

$$
D_1, D_2, \ldots, D_{N-1} = \{s = t_0 < t_N = t\} \tag{5.17}
$$

とすると

$$
\left|\tilde{I}_f(x;D_{k-1})_{s,t} - \tilde{I}_f(x;D_k)_{s,t}\right| \le C\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k}\right)^{3/p}\|\nabla^2 f\|_\infty.
$$

だから

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{I}_f(x;D)_{s,t} - \left(f(x_s)\bar{x}^1_{s,t} + \nabla f(x_s)\bar{x}^2_{s,t}\right)\right| &\le \left|\sum_{k=1}^{N-1}\Big\{\tilde{I}_f(x;D_{k-1})_{s,t} - \tilde{I}_f(x;D_k)_{s,t}\Big\}\right| \\
&= C\cdot\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k}\right)^{3/p}\|\nabla^2 f\|_\infty \qquad (5.18) \\
&\le 2^{3/p}C\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\|\nabla^2 f\|_\infty\omega(s,t)^{3/p}. \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$|\tilde{I}_f(x;D)_{s,t}| \le \|f\|_\infty \omega(s,t)^{1/p} + \|\nabla f\|_\infty \omega(s,t)^{2/p} + C\|\nabla^2 f\|_\infty \omega(s,t)^{3/p}.$$

$\lim_{|D|\to 0} \tilde{I}_f(x;D)_{s,t} = I_f(x)_{s,t}$ なので評価が得られた. □

Remark 5.7. 上の証明では $x \in V_T^1(E)$ なので $\lim_{|D|\to 0} \tilde{I}_f(x;D)_{s,t} = I_f(x)_{s,t}$ となることを用いている．しかし Young 積分の収束を示したときのように収束を示すことができる．この議論は一般の rough path に対する積分が収束することを示すときに用いられる．Definition 7.1 を参照. D' を $D = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ の細分とする．$D'(i) = \{t_{i-1} = s_0^i < \ldots < s_{n(i)}^i = t_i\}$ を $[t_{i-1}, t_i]$ における D' の分割とする．

$$\tilde{I}_f(x;D') = \sum_{i=1}^{N} \tilde{I}_f(x;D'(i))_{t_{i-1},t_i} \tag{5.20}$$

$$\tilde{I}_f(x;D'(i)) = \sum_{j=0}^{n(i)-1} \tilde{I}_f(x)_{s_j^i, s_{j+1}^i}. \tag{5.21}$$

上記と同様な議論で

$$|\tilde{I}_f(x;D'(i))_{t_{i-1},t_i} - \tilde{I}_f(x)_{t_{i-1},t_i}| \le 2^{3/p} C\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\|\nabla^2 f\|_\infty \omega(t_{i-1},t_i)^{3/p}. \tag{5.22}$$

従って

$$|\tilde{I}_f(x;D')_{s,t} - \tilde{I}_f(x,D)_{s,t}| = \sum_{i=1}^{N} |\tilde{I}_f(x;D'(i))_{t_{i-1},t_i} - \tilde{I}_f(x)_{t_{i-1},t_i}| \tag{5.23}$$

$$\le 2^{3/p} C\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\|\nabla^2 f\|_\infty \max_{1\le i\le N} \omega(t_{i-1},t_i)^{\frac{3}{p}-1}\omega(s,t). \tag{5.24}$$

$\lim_{\delta\to 0}\sup\{\omega(s,t) \mid 0 \le t-s \le \delta\} = 0$ より $\lim_{|D|\to 0} \tilde{I}_f(x;D)_{s,t}$ が収束することがわかる.

Theorem 3.5 を証明するが control function を用いて対応する定理を述べ証明する.

Theorem 5.8. *$x, y \in V_T^1(E)$, $2 \le p < 3$ とする．Control function ω が存在して任意の $0 \le s \le t \le T$ に対して*

$$\max\left\{|\bar{x}_{s,t}^1|, |\bar{y}_{s,t}^1|\right\} \le \omega(s,t)^{1/p} \tag{5.25}$$

$$\max\left\{|\bar{x}_{s,t}^2|, |\bar{y}_{s,t}^2|\right\} \le \omega(s,t)^{2/p} \tag{5.26}$$

$$|\bar{x}_{s,t}^1 - \bar{y}_{s,t}^1| \le \varepsilon\omega(s,t)^{1/p} \tag{5.27}$$

$$|\bar{x}_{s,t}^2 - \bar{y}_{s,t}^2| \le \varepsilon\omega(s,t)^{2/p} \tag{5.28}$$

とすると

$$\left|(I_f(x)_{s,t} - \tilde{I}_f(x)_{s,t}) - (I_f(y)_{s,t} - \tilde{I}_f(y))_{s,t}\right| \le \varepsilon C\omega(s,t)^{3/p}, \tag{5.29}$$

$$|I_f(x)_{s,t} - I_f(y)_{s,t}| \le \varepsilon C\omega(s,t)^{1/p} \tag{5.30}$$

C は $\omega(0,T), p$ $\|\nabla^i f\|_\infty$ $(0 \le i \le 3)$ にのみ依存する定数である．

Proof. $N \geq 2$ とする．分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ から前と同じようにひとつずつ分点を除いていった分割を

$$D = D_0, D_1, \ldots, D_{N-1} = \{s, t\}$$

とする．

$$\begin{aligned}
&\left|\tilde{I}_f(x;D)_{s,t} - \tilde{I}_f(y;D)_{s,t}\right| \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{N-1} \left|\left\{\tilde{I}_f(x;D_{k-1})_{s,t} - \tilde{I}_f(x;D_k)\right\} - \left\{\tilde{I}_f(y;D_{k-1})_{s,t} - \tilde{I}_f(y;D_k)_{s,t}\right\}\right| \\
&\quad + \left|\tilde{I}_f(x)_{s,t} - \tilde{I}_f(y)_{s,t}\right|. \qquad (5.31)
\end{aligned}$$

(5.15) の式と仮定から

$$\begin{aligned}
&\left|\left\{\tilde{I}_f(x;D_{k-1}) - \tilde{I}_f(x;D_k)\right\} - \left\{\tilde{I}_f(y;D_{k-1}) - \tilde{I}_f(y;D_k)\right\}\right| \\
&\quad \leq C \cdot \varepsilon \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k}\right)^{3/p} \left(\|\nabla^2 f\|_\infty + \|\nabla^3 f\|_\infty\right). \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

この式から (5.29) が従う．また $\tilde{I}_f(x)$ の定義から

$$\begin{aligned}
&|\tilde{I}_f(x)_{s,t} - \tilde{I}_f(y)_{s,t}| \\
&\leq \varepsilon \left(\|f\|_\infty + \|\nabla f\|_\infty (\omega(0,s)^{1/p} + \omega(s,t)^{1/p}) + \|\nabla^2 f\|_\infty \omega(0,s)^{1/p}\right) \omega(s,t)^{1/p}. \qquad (5.33)
\end{aligned}$$

以上の評価で $|D| \to 0$ として結論が得られる． □

Theorem 3.5 を Theorem 5.8 を用いて証明する．

Proof of Theorem 3.5. ω を

$$\begin{aligned}
\omega(s,t) &= \|\bar{x}^1\|^p_{p,[s,t]} + \|\bar{y}^1\|^p_{p,[s,t]} + \|\bar{x}^2\|^{p/2}_{p/2,[s,t]} + \|\bar{y}^2\|^{p/2}_{p/2,[s,t]} \qquad (5.34) \\
&\quad + \left(\varepsilon^{-1}\|\bar{x}^1 - \bar{y}^1\|_{p,[s,t]}\right)^p + \left(\varepsilon^{-1}\|\bar{x}^2 - \bar{y}^2\|_{p/2,[s,t]}\right)^{p/2}. \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

と定義する．Theorem 5.8 の仮定がすべて成立するので定理を適用すれば良い． □

Remark 5.9. 以上 $E = \mathbb{R}^d$ だったが $d = 1$ は特別である．実際 $F(x) = \int_0^x f(u)du$ とすると

$$I_f(x)_{s,t} = \int_s^t f(x_u)dx_u = F(x_t) - F(x_s).$$

したがって $x(\in C_T(E)) \to I_f(x)_{s,t}$ は $C_T(E)$ 上の連続関数である．この場合 $\bar{x}^2_{s,t}$ は一次元の成分のみからなり

$$\bar{x}^2_{s,t} = \int_s^t (x_u - x_s)dx_u = \frac{1}{2}(x_t - x_s)^2$$

かつ $\|\bar{x}^2\|_{p/2} = \|\bar{x}^1\|_p$.

6 Rough path

前の節で $\bar{x}^1_{s,t}, \bar{x}^2_{s,t}$ を用いて

(1) $\lim_{|D|\to 0} \tilde{I}_f(x;D)_{s,t}$ が収束する

(2) $x \to I_f(x)_{s,t}$ が連続写像

であることを示した．これを示すには $\bar{x}^1_{s,t}, \bar{x}^2_{s,t}$ がパス x_t から決まっている必要は無く，Chen の関係式と $2 \le p < 3$ をみたす p を固定し，control function ω による評価

$$\begin{aligned}
\bar{x}^1_{s,u} &= \bar{x}^1_{s,t} + \bar{x}^1_{t,u} \quad 0 \le s \le t \le u \le T, \\
\bar{x}^2_{s,u} &= \bar{x}^2_{s,t} + \bar{x}^2_{t,u} + \bar{x}^1_{s,t} \otimes \bar{x}^1_{t,u} \qquad 0 \le s \le t \le u \le T, \\
|\bar{x}^1_{s,t}| &\le \omega(s,t)^{1/p} \qquad 0 \le s \le t \le T, \\
|\bar{x}^2_{s,t}| &\le \omega(s,t)^{2/p} \qquad 0 \le s \le t \le T
\end{aligned}$$

があれば十分である．上記の性質をもつ $\bar{x}^1, \bar{x}^2$ は control function を ω とする p-rough path と言う．$p \ge 3$ のときは $\bar{x}^3_{s,t} = \int_s^t \bar{x}^2_{s,u} \otimes dx_u$ も必要である．以下より一般的に説明する．$E = \mathbb{R}^d$ である．

Definition 6.1 (Multiplicative functional)**.** $E^0 = \mathbb{R}$, $T^{(n)}(E) = \oplus_{k=0}^n E^{\otimes k}$ とする．$T(E)$ は

$$(a_i)_{i=0}^n \otimes (b_i)_{i=0}^n = (c_i)_{i=0}^n, \tag{6.1}$$

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j \otimes b_{i-j} \qquad 1 \le i \le n \tag{6.2}$$

で非可換代数である．$E^{\otimes k}$ は正規直交基底 $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}\}$ をもつ有限次元ヒルベルト空間である．$T^{(n)}(E)$ には $|a| = \sum_{i=0}^n |a_i|$ *for* $a = (a_0, \ldots, a_n)$ でノルムが入る．

Definition 6.2 (p-rough path)**.** (1) 写像 $X : \Delta_T \to T^{(n)}(E)$ は

$$X = (X^0_{s,t}, \ldots, X^n_{s,t}) \qquad (s,t) \in \Delta_T \tag{6.3}$$

のように書ける．連続写像 $X : \Delta_T \to T^{(n)}(E)$ で $X^0_{s,t} \equiv 1$ となるもの全体を $C_0(\Delta_T, T^{(n)}(E))$ とかく．
(2) $X \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(E))$ が *degree n の multiplicative functional* であるとは任意の $0 \le s \le t \le u \le T$ に対して

$$X_{s,t} \otimes X_{t,u} = X_{s,u}. \tag{6.4}$$

となるときに言う．(6.4) を *Chen* の関係式と言う．
(3) $X \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(E))$ が *finite total p-variation* とは

$$\|X^i\|_{p/i} < \infty \quad 1 \le i \le n$$

のときに言う．$C_{0,p}(\Delta_T, T^{(n)}(E))$ で *finite total p-variation* である $C_0(\Delta_T, T^{(n)}(E))$ の部分集合を表す．

(4) $p \geq 1$ とする．$[p]$ を p 以下の最大整数とする．$C_{0,p}(\Delta_T, T^{([p])}(E))$ の元で *multiplicative functional* であるものを *p-rough path* と言う．*p-rough path* 全体を $\Omega_{p,T}(E)$ と書く．T を省略して $\Omega_p(E)$ と書くこともある．また X^k を *k-level path* と言う．

Remark 6.3. (1) $X \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(E))$ を multiplicative functional とする．$X^1_{0,t} = X^1_{0,s} + X^1_{s,t} \quad 0 \leq s \leq t \leq T$ なので

$$X^1_{s,t} = X^1_{0,t} - X^1_{0,s} \qquad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

従って 1st-level path は E 上の連続曲線 $x_t = \xi + X^1_{0,t}$ を用いて

$$X^1_{s,t} = \bar{x}^1_{s,t} (:= x_t - x_s)$$

と書ける．Multiplicative functional X は連続曲線 x_t の lift であると言う．Lift は一意的では無い．Remark 6.6 を見よ．

(2) $X \in C_0(\Delta_T, T^{(n)}(E))$ とする．X が finite total p-variation であるとは

$$\omega(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \|X^i\|^{p/i}_{p/i,[s,t]} \tag{6.5}$$

が control function になることと同値である．これが control function ならば finite total p-variation であることは簡単. 逆については Lemma 13.2 を見よ．[21] では multiplicativity を用いて control fucntion になることが証明されている (Proposition 3.3.2) がそれは不要と思われる．

結局 finite total p-variation ということをある control function $\omega(s,t)$ $(s,t) \in \Delta_T$ が存在して

$$|X^i_{s,t}| \leq \omega(s,t)^{i/p}, \forall i = 1, \ldots, n, \quad \forall (s,t) \in \Delta_T \tag{6.6}$$

となることと言い換えてもよい．従って p-rough path とは

$$|X^i_{s,t}| \leq \omega(s,t)^{i/p}, \forall i = 1, \ldots, [p], \quad \forall (s,t) \in \Delta_T \tag{6.7}$$

をみたす control function ω を持つ multiplicative functional である．

(3) $2 \leq p < 3$ とする．$[p] = 2$ なので p-rough path は

$$X_{s,t} = (1, X^1_{s,t}, X^2_{s,t})$$

の形をしている．$0 \leq s \leq t \leq u \leq T$ に対して $X_{s,u} = X_{s,t} \otimes X_{t,u}$ は

$$X^1_{s,u} = X^1_{s,t} + X^1_{t,u}, \quad X^2_{s,u} = X^2_{s,t} + X^2_{t,u} + X^1_{s,t} \otimes X^1_{t,u}$$

と同値である．

Proposition 6.4. $\Omega_p(E)$ は距離

$$d_p(X,Y) = \max_{1 \leq i \leq [p]} \|X^i - Y^i\|_{p/i} \tag{6.8}$$

で完備な距離空間になる．(線型空間ではない*!*)

Example 6.5. $x \in V_T^1(E)$ とする．$1 \le k \le n$ とし帰納的に $(s,t) \in \Delta_T$ に対して

$$\bar{x}_{s,t}^1 = x_t - x_s \tag{6.9}$$

$$\bar{x}_{s,t}^k = \int_s^t \bar{x}_{s,u}^{k-1} \otimes dx_u \in E^{\otimes k} \tag{6.10}$$

と定めると $X_{s,t} = (1, \bar{x}_{s,t}^1, \ldots, \bar{x}_{s,t}^n)$ は *degree* n の *multiplicative functional* であり $n \le p < n+1$ なる p に対して *p-rough path* である．これを *smooth rough path* と言う．

Remark 6.6. (1) Smooth rough path の全体の集合の d_p での $\Omega_p(E)$ の中での閉包を $G\Omega_p(E)$ と書く．$G\Omega_p(E)$ の元を geometric p-rough path と言う．
(2) $2 \le p < 3$ とする．p-rough path $X = (1, X_{s,t}^1, X_{s,t}^2)$ に対して

$$X_{s,t}^1 = \sum_{i=1}^d X_{s,t}^{1,i} e_i, \tag{6.11}$$

$$X_{s,t}^2 = \sum_{1 \le i,j \le d} X_{s,t}^{2,ij} e_i \otimes e_j \tag{6.12}$$

と書ける．したがって $X_{s,t}^2$ は $d \times d$ 行列と同一視できる．X が geometric rough path のとき $X_{s,t}^{2,ij}$ に関して次が言える．

> 任意の $1 \le i, j \le d$, $0 \le s \le t \le T$ に対して
>
> $$X_{s,t}^{2,ij} + X_{s,t}^{2,ji} = X_{s,t}^{1,i} \cdot X_{s,t}^{1,j}. \tag{6.13}$$

これは X^2 の対称行列の部分は X^1 で一意的に決まってしまうことを示している．しかし一般の rough path, multiplicative functional のときはこの関係は一般には成立しない．理由は以下の通り．$X = (1, X_{s,t}^1, X_{s,t}^2)$ を p-rough path とする．$\phi \in V_T^{p/2}(E \otimes E)$ とする．$X' = (1, X_{s,t}^1, X_{s,t}^2 + \phi(t) - \phi(s))$ とおくと X' も p-rough path である．
(3) $2 \le p < 3$ とする．Geometric p-rough path $X = (1, X_{s,t}^1, X_{s,t}^2)$ の 1st level path $x_t = X_{0,t}^1$ が C^∞ 曲線だとしても

$$X_{s,t}^2 = \bar{x}_{s,t}^2$$

とは限らない．例えば

$$x(n) = {}^t(x(n)_t^1, x(n)_t^2) \in PC_T^1(\mathbb{R}^2) \tag{6.14}$$

$$x^1(n)_t = \frac{\cos\left(n^2 t\right) - 1}{n}, \tag{6.15}$$

$$x^2(n)_t = \frac{\sin\left(n^2 t\right)}{n} \tag{6.16}$$

とし smooth rough path $\overline{x(n)} = (1, \overline{x(n)}_{s,t}^1, \overline{x(n)}_{s,t}^2)$ を考える．$\lim_{n\to\infty} \overline{x(n)}$ は $\Omega_p(\mathbb{R}^2)$ $(p > 2)$ の位相で

$$(1, 0, \frac{1}{2}A(t-s)), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

に収束する．したがって極限の geometric rough path の 1st level path は 0 だが 2nd level path は 0 ではない．

Definition 6.7. (1) *Theorem* 4.1 で

$$\tilde{\Theta}^d = \left\{ w \in \Theta^d \;\middle|\; \text{任意の } 2 < p \leq 3 \text{ に対して } \lim_{n,m\to\infty} d_p(w(n), w(m)) = 0 \right\} \quad (6.17)$$

を導入した．各 $w \in \tilde{\Theta}$ に対して $\bar{w} = \lim_{n\to\infty} \overline{w(n)} \in \cap_{p>2} G\Omega_p(E)$ が定まる．これを *canonical geometric rough path* と言う．$\mu(\tilde{\Theta}) = 1$ なのでほとんどすべての *Brown* 運動のパスは *caninical geometric rough path* を定める．これを *Brownian rough path* と言う．
(2) μ が *Hurst parameter* $H = 1/p$ $(p < 4)$ の *fractional Brownian motion* の分布のときも $\overline{w(n)}$ は *a.s.* に d_p に関してコーシー列であることが知られている．ただし $3 \leq p < 4$ のときは

$$\overline{w(n)} = (1, \overline{w(n)}^1, \overline{w(n)}^2, \overline{w(n)}^3)$$

のように $\overline{w(n)}^3$ の項もあることに注意する必要がある．従ってこの *caninical geometric rough path* に対する積分も考えることができる．

この節の冒頭で注意したように $2 \leq p < 3$ の場合の p-rough path $X = (1, X^1_{s,t}, X^2_{s,t})$ に対して $X_t = \xi + X^1_{0,t}$ とおいて

$$\tilde{I}_{f,\xi}(X)_{s,t} = f(X_s)(X^1_{s,t}) + (\nabla f)(X_s)(X^2_{s,t})$$

を用いて X に対する積分 $\int f(X_u)dX_u$ が定義できる．しかし $2 \leq p < 3$ の時，p-rough path は 2nd level path も持つ．すなわち積分による 2nd level path $\int f(X_u)dX^2_u$ も定義する必要がある．$p \geq 3$ の場合は $X^3_{s,t}$ などもっと多くの項がついてきて記述が複雑になるので，以下は $2 \leq p < 3$ の場合で p-rough path に対する積分を定義する．

7 ラフパスに対する線積分

ラフパス $X_{s,t} = (1, X^1_{s,t}, X^2_{s,t})$ は二つのパラメータ $0 \leq s \leq t \leq T$ をもちパスの増分のみを表現している．一般的に曲線を考えるときには、空間内のどの点から出発するか指定してやる必要がある．例えば $\xi \in E$ を取り

$$X_t = X^1_{0,t} + \xi$$

とおけば ξ 出発のパスになる．
以下の評価で $\|\nabla^i f\|_\infty$ $(0 \leq i \leq k)$ の正の係数を持つ簡単な多項式で書ける正定数が多数現れるがいちいち書いていても面倒かつ本質的ではないので, それを $C_k(f)$ と書くことにする．また式変形の中で同じ $C_k(f)$ が出てきてもそれらが同じ多項式とは限らないことに注意すること．

Definition 7.1 (線積分)**.** $2 \leq p < 3$ とし $X = (1, X^1, X^2) \in \Omega_{p,T}(E)$ とする．$\xi \in E$ を取り $X_t = \xi + X^1_{0,t}$ と定める．$f \in C^2_b(E, L(E,F))$ $(E = \mathbb{R}^d, F = \mathbb{R}^m)$ とする．

$$\tilde{I}_{f,\xi}(X)^1_{s,t} = f(X_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(X_s)X^2_{s,t} \quad (7.1)$$

$$\tilde{I}_{f,\xi}(X)^2_{s,t} = f(X_s) \otimes f(X_s)\left(X^2_{s,t}\right) \quad (7.2)$$

と定める．$[s,t]$ の分割 $D=\{s=t_0<\cdots<t_N=t\}$ に対して

$$\tilde{I}_{f,\xi}(X;D)^1_{s,t} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{I}_{f,\xi}(X)^1_{t_{i-1},t_i} \tag{7.3}$$

$$\tilde{I}_{f,\xi}(X;D)^2_{s,t} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{I}_{f,\xi}(X)^2_{t_{i-1},t_i} + \sum_{i=1}^{N} I_{f,\xi}(X)^1_{s,t_{i-1}} \otimes I_{f,\xi}(X)^1_{t_{i-1},t_i} \tag{7.4}$$

と定める．ここで $I_{f,\xi}(X)^1_{s,t}$ は極限

$$I_{f,\xi}(X)^1_{s,t} = \lim_{|D|\to 0} \tilde{I}_{f,\xi}(X;D)^1_{s,t} \tag{7.5}$$

として定義する．この極限の存在は *Remark* 5.7 と全く同様に示すことができる．また極限

$$\lim_{|D|\to 0} \tilde{I}_{f,\xi}(X;D)^2_{s,t} \tag{7.6}$$

も存在する．これを $I_{f,\xi}(X)^2_{s,t}$ と書く．$I_{f,\xi}(X)^i_{s,t}$ を

$$\int_s^t f(X_u)dX^i_u$$

のように書くことにする．$I_{f,\xi}(X)=(1,I_{f,\xi}(X)^1,I_{f,\xi}(X)^2)$ は F 上の *p-rough* である．すなわち

$$\begin{aligned}&\int_s^t f(X_u)dX_u (= I_{f,\xi}(X)_{s,t})\\ &\quad= \left(1, \int_s^t f(X_u)dX^1_u, \int_s^t f(X_s)dX^2_u\right) \in \Omega_p(F).\end{aligned} \tag{7.7}$$

f,ξ がはっきりしている時や出発点 ξ を特にはっきりさせる必要の無い時, 記述を簡単にするためこれらを明示せず

$$I_f(X)^i_{s,t}, \quad I(X)^i_{s,t}$$

などと書くこともある．

Remark 7.2. (1) $f^\xi(\cdot)=f(\xi+\cdot)$ とする．$X_t=\xi+X^1_{0,t}$ のとき,

$$\int_s^t f(X_u)dX^i_u = \int_s^t f^\xi(X^1_{0,u})dX^i_u = I_{f^\xi,0}(X)^i_{s,t} = I_{f,\xi}(X)^i_{s,t}.$$

(2) $X=(1,X^1,X^2)$ を smooth rough path とする．すなわち $x=(x_t)\in V^1_T(E)$ を用いて

$$X^1_{s,t} = x_t - x_s, \quad X^2_{s,t} = \int_s^t (x_u - x_s)\otimes dx_u.$$

とする．$I_{f,\xi}(X)$ は F 上のパス

$$z_t = \int_0^t f(\xi + x_u)dx_u$$

の上の smooth rough path と一致する．すなわち

$$
\begin{aligned}
I_{f,\xi}(X)^1_{s,t} &= z_t - z_s && (7.8)\\
I_{f,\xi}(X)^2_{s,t} &= \int_s^t (z_u - z_s) \otimes dz_u && (7.9)
\end{aligned}
$$

となる．右辺のラフパスは $\bar{z}$ と書く約束だった．$I_{f,\xi}(X)^1_{s,t} = \bar{z}^1_{s,t}$ は簡単な計算でわかる．2nd level path が一致することを見る．

$$
\begin{aligned}
\bar{z}^2_{s,t} &= \int_s^t \left(\int_s^u f(\xi + x_r) dx_r \right) \otimes (f(\xi + x_u) dx_u) && (7.10)\\
&= \int_s^t \left(\int_s^u (f(\xi + x_r) - f(\xi + x_s))\, dx_r \right) \otimes (f(\xi + x_u) dx_u) \\
&\quad + \int_s^t (f(\xi + x_s)(x_u - x_s)) \otimes (f(\xi + x_u) dx_u) && (7.11)\\
&= \int_s^t \left(\int_s^u (f(\xi + x_r) - f(\xi + x_s))\, dx_r \right) \otimes (f(\xi + x_u) dx_u) \\
&\quad + \int_s^t (f(\xi + x_s)(x_u - x_s)) \otimes ((f(\xi + x_u) - f(\xi + x_s)) dx_u) \\
&\quad + \int_s^t (f(\xi + x_s)(x_u - x_s)) \otimes (f(\xi + x_s) dx_u) \\
&= R_f(x)_{s,t} + f(X_s) \otimes f(X_s) \left(X^2_{s,t} \right). && (7.12)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
|R_f(x)_{s,t}| \le C_1(f) \left(\max_{s \le u \le t} |x_u - x_s|^2 \|x\|_{1,[s,t]} + \max_{s \le u \le t} |x_u - x_s| \|x\|^2_{1,[s,t]} \right).
$$

ゆえに $\lim_{|D| \to 0} \sum_{i=1}^N |R_f(x)_{t_{i-1},t_i}| = 0$. 従って定義と $\bar{z}$ が Chen の恒等式を満たすことから $I_{f,\xi}(X)^2_{s,t} = \bar{z}^2_{s,t}$.

上記定義の極限が収束することを示すため次の Lemma を準備をする．

Lemma 7.3. (1) $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$, $1 \le l \le N-1$ とする．

$$
\begin{aligned}
&\tilde{I}_{f,\xi}(X; D)^1_{s,t} - \tilde{I}_{f,\xi}(X; D \setminus \{t_l\})^1_{s,t} \\
&\quad = \int_0^1 \left(\int_0^\alpha (\nabla^2 f)\,(X_{t_{l-1}} + \beta X^1_{t_{l-1},t_l}) d\beta \right) d\alpha \left(X^1_{t_{l-1},t_l} \otimes X^1_{t_{l-1},t_l} \right) (X^1_{t_l,t_{l+1}}) \\
&\quad + \int_0^1 (\nabla^2 f) \left(X_{t_{l-1}} + \alpha X^1_{t_{l-1},t_l} \right) d\alpha \left(X^1_{t_{l-1},t_l} \otimes X^2_{t_l,t_{l+1}} \right) && (7.13)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{I}_{f,\xi}(X;D)^2_{s,t} - \tilde{I}_{f,\xi}(X;D\setminus\{t_l\})^2_{s,t} \\
&\quad = \left(\int_0^1 (\nabla f)(X_{t_{l-1}} + \alpha X^1_{t_{l-1},t_l})(X^1_{t_{l-1},t_l})d\alpha\right) \otimes f(X_{t_l})(X^2_{t_l,t_{l+1}}) \\
&\qquad + f(X_{t_{l-1}}) \otimes \left(\int_0^1 (\nabla f)(X_{t_{l-1}} + \alpha X^1_{t_{l-1},t_l})(X^1_{t_{l-1},t_l})d\alpha\right)(X^2_{t_l,t_{l+1}}) \\
&\qquad + \left(f(X_{t_{l-1}})X^1_{t_{l-1},t_l}\right) \otimes \int_0^1 (\nabla f)(X_{t_{l-1}} + \alpha X^1_{t_{l-1},t_l})(X^1_{t_{l-1},t_l})(X^1_{t_l,t_{l+1}})d\alpha \\
&\qquad + f(X_{t_{l-1}})(X^1_{t_{l-1},t_l}) \otimes (\nabla f)(X_{t_l})(X^2_{t_l,t_{l+1}}) \\
&\qquad + (\nabla f)(X_{t_{l-1}})(X^2_{t_{l-1},t_l}) \otimes f(X_{t_l})(X^1_{t_l,t_{l+1}}) \\
&\qquad + (\nabla f)(X_{t_{l-1}})(X^2_{t_{l-1},t_l}) \otimes (\nabla f)(X_{t_l})(X^2_{t_l,t_{l+1}}) \\
&\qquad + \left(I_{f,\xi}(X)^1_{t_{l-1},t_l} - \tilde{I}_{f,\xi}(X)^1_{t_{l-1},t_l}\right) \otimes \left(I_{f,\xi}(X)^1_{t_l,t_{l+1}} - \tilde{I}_{f,\xi}(X)^1_{t_l,t_{l+1}}\right) \\
&\qquad + \left(I_{f,\xi}(X)^1_{t_{l-1},t_l} - \tilde{I}_{f,\xi}(X)^1_{t_{l-1},t_l}\right) \otimes \tilde{I}_{f,\xi}(X)^1_{t_l,t_{l+1}} \\
&\qquad + \tilde{I}_{f,\xi}(X)^1_{t_{l-1},t_l} \otimes \left(I_{f,\xi}(X)^1_{t_l,t_{l+1}} - \tilde{I}_{f,\xi}(X)^1_{t_l,t_{l+1}}\right). \qquad (7.14)
\end{aligned}$$

(2) $\omega(s,t)$ を X の *control function* とする．$C_1(f), C_2(f)$ が存在し

$$|I_{f,\xi}(X)^1_{s,t} - \tilde{I}_{f,\xi}(X)^1_{s,t}| \leq C_2(f)\omega(s,t)^{3/p}, \qquad (7.15)$$

$$|\tilde{I}_{f,\xi}(X;D)^1_{s,t} - \tilde{I}_{f,\xi}(X)^1_{s,t}| \leq C_2(f)\omega(s,t)^{3/p}, \qquad (7.16)$$

$$|\tilde{I}_{f,\xi}(X;D)^2_{s,t} - \tilde{I}_{f,\xi}(X)^2_{s,t}| \leq C_2(f)\left(1+\omega(s,t)^{3/p}\right)\omega(s,t)^{3/p}. \qquad (7.17)$$

Proof. (1) First level path に対する等式はすでに示した．2nd level path の方を示す．簡単のため $I_{f,\xi}(X)$ を単に $I(X)$ と書く．

$$\begin{aligned}
&\tilde{I}(X;D)^2_{s,t} - \tilde{I}(X;D\setminus\{t_l\})^2_{s,t} \\
&\quad = f(X_{t_{l-1}}) \otimes f(X_{t_{l-1}})(X^2_{t_{l-1},t_l}) + f(X_{t_l}) \otimes f(X_{t_l})(X^2_{t_l,t_{l+1}}) - f(X_{t_{l-1}}) \otimes f(X_{t_{l-1}})(X^2_{t_{l-1},t_{l+1}}) \\
&\qquad + I(X)^1_{s,t_{l-1}} \otimes I(X)^1_{t_{l-1},t_l} + I(X)^1_{s,t_l} \otimes I(X)^1_{t_l,t_{l+1}} - I(X)^1_{s,t_{l-1}} \otimes I(X)^1_{t_{l-1},t_{l+1}} \\
&\quad = f(X_{t_l}) \otimes f(X_{t_l})(X^2_{t_l,t_{l+1}}) - f(X_{t_{l-1}}) \otimes f(X_{t_{l-1}})(X^2_{t_l,t_{l+1}}) \\
&\qquad - \left(f(X_{t_{l-1}}) \otimes f(X_{t_{l-1}})\right)(X^1_{t_{l-1},t_l} \otimes X^1_{t_l,t_{l+1}}) + I(X)^1_{t_{l-1},t_l} \otimes I(X)^1_{t_l,t_{l+1}} \\
&\quad = \left((f(X_{t_l}) \otimes f(X_{t_l})) - (f(X_{t_{l-1}}) \otimes f(X_{t_{l-1}}))\right)(X^2_{t_l,t_{l+1}}) \\
&\qquad + \left(f(X_{t_{l-1}}) \otimes (f(X_{t_l}) - f(X_{t_{l-1}}))\right)(X^1_{t_{l-1},t_l} \otimes X^1_{t_l,t_{l+1}}) \\
&\qquad + I(X)^1_{t_{l-1},t_l} \otimes I(X)^1_{t_l,t_{l+1}} - \left(f(X_{t_{l-1}})X^1_{t_{l-1},t_l}\right) \otimes \left(f(X_{t_l})X^1_{t_{l-1},t_l}\right). \qquad (7.18)
\end{aligned}$$

この式で第 1 項, 第 2 項が求める式の第 1,2,3 項にあたる．第 3 項と第 4 項の差が残りの項に対応する．

(2) 1st level path の評価はすでに述べた方法で得られる．2nd level path を見る．これは (1) で得られた等式 (7.14) と (7.15) を用いて一点ずつ点を除いて行く 1st level path と同様な論法を用いればよい． □

Lemma 7.4. (7.5), (7.6) の極限が存在し，*p-rough path* を定める．

Proof. (1) 極限の存在： (7.5) の存在はすでに示した．(7.6) の存在を示す．D を $[s,t]$ の分割とし D' をその細分とする．$\tilde{I}(X;D')^2_{s,t}-\tilde{I}(X;D)^2_{s,t}$ を評価する．$D=\{s=t_0<\cdots<t_N=t\}$ とし $D'(i)=\{t_{i-1}=s^i_0<\cdots<s^i_{n(i)}=t_i\}$ を小区間 $[t_{i-1},t_i]$ における D' の分割点とする．定義から

$$\tilde{I}(X;D')^2_{s,t}-\tilde{I}(X;D)^2_{s,t} = \sum_{i=1}^{N}\left(\tilde{I}(X;D'(i))^2_{t_{i-1},t_i}-\tilde{I}(X)^2_{t_{i-1},t_i}\right). \tag{7.19}$$

Lemma 7.3 (2) より

$$\begin{aligned}|\tilde{I}(X;D')^2_{s,t}-\tilde{I}(X;D)^2_{s,t}| &\le C\sum_{i=1}^{N}\omega(t_{i-1},t_i)^{3/p}\\ &\le C\max_{1\le i\le N}\omega(t_{i-1},t_i)^{(3/p)-1}\omega(s,t).\end{aligned} \tag{7.20}$$

この評価は $|D|\to 0$ のとき $\tilde{I}(X;D)^2_{s,t}$ が収束することを示している．
(2) $I_f(X)^1, I_f(X)^2$ が $C\cdot\omega(s,t)$ という形の control function を持つのは Lemma 7.3 (2) の評価から自明.
(3) $I_f(X)$ が Chen の関係式をみたすことを示す．$I_f(X)^1_{s,u}=I_f(X)^1_{s,t}+I_f(X)^1_{t,u}$ $s\le u\le t$ は定義から従う．$s<t<u$ とし

$$D=\{s=t_0<\cdots t_N=t\},\quad D'=\{t=u_0<\cdots u_M=u\},$$

$$D''=D\cup D'=\{s=v_0<\cdots<v_{N+M}\}$$

とする．

$$\begin{aligned}&\tilde{I}(X;D)^2_{s,t}+\tilde{I}(X;D')^2_{t,u}+I(X)^1_{s,t}\otimes I(X)^1_{t,u}\\ &\quad=\sum_{i=1}^{N}\tilde{I}(X)^2_{t_{i-1},t_i}+\sum_{i=1}^{N}I(X)^1_{s,t_{i-1}}\otimes I(X)^1_{t_{i-1},t_i}\\ &\quad\quad+\sum_{i=1}^{M}\tilde{I}(X)^2_{u_{i-1},u_i}+\sum_{i=1}^{N}I(X)^1_{t,u_{i-1}}\otimes I(X)^1_{u_{i-1},u_i}\\ &\quad\quad+I(X)^1_{s,t}\otimes I(X)^1_{t,u}\\ &= \sum_{i=1}^{N+M}\tilde{I}(X)^2_{v_{i-1},v_i}+\sum_{1\le i<j\le N+M}I(X)^1_{v_{i-1},v_i}\otimes I(X)^1_{v_{j-1},v_j}\\ &= \tilde{I}(X;D'')_{s,t}.\end{aligned} \tag{7.21}$$

$|D|,|D'|\to 0$ とし Chen の恒等式の成立が示される． □

Theorem 7.5 (線積分に対する連続性定理)**.** $f\in C^3_b(E,L(E,F))$ とする．$X=(1,X^1,X^2),Y=(1,Y^1,Y^2)\in\Omega_p(E)$ とする．*Control function* ω で

$$\max\left(|X^i_{s,t}|,|Y^i_{s,t}|\right) \le \omega(s,t)^{i/p},\quad 0\le s\le t\le T, i=1,2 \tag{7.22}$$

$$|X^i_{s,t}-Y^i_{s,t}| \le \varepsilon\omega(s,t)^{i/p},\quad 0\le s\le t\le T, i=1,2 \tag{7.23}$$

とする．このとき任意の ξ, η に対して定数 $C_2(f), C_3(f)$ が存在して $0 \le s \le t \le T, i = 1, 2$ に対して

$$
\begin{aligned}
\left|I_{f,\xi}(X)^i_{s,t}\right| &\le C_2(f)\left(1+\omega(s,t)^{5/p}\right)\omega(s,t)^{i/p}, && (7.24)\\
\left|I_{f,\xi}(X)^i_{s,t} - I_{f,\xi}(Y)^i_{s,t}\right| &\le \varepsilon C_3(f)\left(1+\omega(s,t)^{5/p}\right)\omega(s,t)^{i/p}, && (7.25)\\
\left|I_{f,\xi}(X)^i_{s,t} - I_{f,\eta}(X)^i_{s,t}\right| &\le |\xi-\eta| C_3(f)\left(1+\omega(s,t)^{5/p}\right)\omega(s,t)^{i/p}, && (7.26)
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
\left|(I_{f,\xi}(X)^i_{s,t} - \tilde{I}_{f,\xi}(X)^i_{s,t}) - (I_{f,\xi}(Y)^i_{s,t} - \tilde{I}_{f,\xi}(Y)^i_{s,t})\right| &\le \varepsilon C_3(f)(1+\omega(s,t)^{3/p})\omega(s,t)^{3/p}, && (7.27)\\
\left|(I_{f,\xi}(X)^i_{s,t} - \tilde{I}_{f,\xi}(X)^i_{s,t}) - (I_{f,\eta}(X)^i_{s,t} - \tilde{I}_{f,\eta}(X)^i_{s,t})\right| &\le |\xi-\eta| C_3(f)(1+\omega(s,t)^{3/p})\omega(s,t)^{3/p}. && (7.28)
\end{aligned}
$$

Proof. (7.24), (7.25) の $i=1$ の評価は前節の証明と同じである．(7.27) も (7.25) の証明の過程ですでに示している評価である．これらは $i=2$ の時も $i=1$ の時の結果を用いて等式 (7.14) に注意して同様にすれば示せる．前節で証明していなかった (7.26), (7.28) の $i=1$ の場合の証明を述べる．$i=2$ の証明は $i=1$ の時の結果と (7.14) を用いて同様にできる．以前と同様に分点をひとつづつ除いて行った分割の列 $D, D_1, \ldots, D_{N-1}$ を考える．

$$
\begin{aligned}
&\left|\tilde{I}_{f,\xi}(X;D)^1_{s,t} - \tilde{I}_{f,\eta}(X;D)^1_{s,t}\right|\\
&\quad \le \left|\tilde{I}_{f,\xi}(X)_{s,t} - \tilde{I}_{f,\eta}(X)_{s,t}\right|\\
&\qquad + \sum_{k=1}^{N-1}\left|\left(\tilde{I}_{f,\xi}(X;D_{k-1})^1_{s,t} - \tilde{I}_{f,\xi}(X;D_k)^1_{s,t}\right) - \left(\tilde{I}_{f,\eta}(X;D_{k-1})^1_{s,t} - \tilde{I}_{f,\eta}(X;D_k)^1_{s,t}\right)\right|\\
&\quad =: I_1 + I_2. \qquad (7.29)
\end{aligned}
$$

I_1, I_2 それぞれ

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\le \left(\|\nabla f\|_\infty \omega(s,t)^{1/p} + \|\nabla^2 f\|_\infty \omega(s,t)^{2/p}\right)|\xi-\eta| && (7.30)\\
|I_2| &\le C\|\nabla^3 f\|_\infty \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k}\right)^{3/p}|\xi-\eta| && (7.31)
\end{aligned}
$$

と評価されるので (7.26), (7.28) が得られる． □

以下の等式は微積分の基本定理に相当するものであるが geometric rough path に対してしか成立しない.

Proposition 7.6. $X = (1, X^1, X^2) \in G\Omega_p(E)$ とする．$f \in C^3(E, L(E,F)))$ とすると

$$
f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t (\nabla f)(X_s)dX^1_s (= I_{f,\xi}(X)^1_{0,t}). \qquad (7.32)
$$

Remark 7.7 (Ito 積分)**.** $\bar{w}$ を E 上の Brownian rough path とする．

$$X_{s,t} = (1, \bar{w}^1_{s,t}, \bar{w}^2_{s,t} - \frac{1}{2}I(t-s)))$$

と p-rough path を定める $(2 < p < 3)$．ただし I は恒等写像であり, $E \otimes E$ を E から E への線形写像全体と同一視している．この X は geometric rough path ではない．Ito 積分はこの X による積分と一致する．すなわち

$$\int_s^t f(\xi + w_u) dw_u = I_{f,\xi}(X)_{s,t} \quad \mu - a.s.\ w. \tag{7.33}$$

より一般に p-rough path $X = (1, X^1, X^2)$ が given とする．$\phi \in V_T^{p/2}(E \otimes E)$ とし p-rough path

$$X(\phi)_{s,t} = (1, X^1_{s,t}, X^2_{s,t} + \phi_t - \phi_s)$$

を定めると

$$I_{f,\xi}(X(\phi))^1_{s,t} = I_{f,\xi}(X)^1_{s,t} + \int_s^t (\nabla f)(X_u) d\phi_u.$$

積分 $\int_s^t (\nabla f)(X_u) d\phi_u$ は Young 積分である．(Young 積分が収束することを示した証明と同様にして X_t が p-variation 有限, ϕ_t が $p/2$-variation 有限で $\dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{p} > 1$ なので Riemann 和が収束することがわかるのである).

8 Rough differential equation

この節では Rough differential equation を導入し，その解が rough path の連続な汎関数となることを主張する Lyons の連続性定理を述べる．以下 $2 \le p < 3$ として考える rough path はすべて p-rough path とする．

$f \in C_b^1(F, L(E, F))$. とする．

$$\dot{y}_t = f(\xi + y_t)\dot{x}_t \tag{8.1}$$

$$y_0 = 0 \in F. \tag{8.2}$$

f は線型写像値の関数だが簡単のためベクトル場とよぶことにする．y_t は $f^\xi(\cdot) = f(\xi + \cdot)$ をベクトル場と見れば 0 出発の解だが，f をベクトル場と見れば $\xi + y_t$ はベクトル場が f で ξ 出発の解である．Rough path はパスの増分のみで定義されているので，出発点はまた別に考える必要がある．$1 \le p < 2$ で $x \in V_T^p(E)$ のときは積分は Young 積分として意味がつき解は縮小写像の原理 (あるいは逐次近似と言っても同じ) で構成できることを見た．ここでは E 上のラフパス X でドライブされた方程式を考える．ラフパスの場合もある写像の不動点として解が構成されるが，$1 \le p < 2$ のときほど単純ではない．

ラフパスの場合に適用できるようにこの微分方程式を $E \oplus F$ 上の微分方程式とみなす．そのため、$\hat{f} \in C_b^1\,(E \oplus F \to L(E \oplus F, E \oplus F)$ を

$$\hat{f}^\xi(x,y)\left({}^t(u,v)\right) = {}^t(u, f^\xi(y)v) \quad ((x,y) \in E \oplus F, (u,v) \in E \oplus F) \tag{8.3}$$

と定める。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ f^{\xi}(y_t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

をみたすから、$z_t = {}^t(x_t, y_t)$ は $\dot{z}_t = \hat{f}^{\xi}(z_t)\dot{z}_t$ の解である．z_t は $E \oplus F$ 上の解だがラフパスの場合，$\Omega(E \oplus F)$ の元が解になる．

$$\begin{aligned} &T^2(E \oplus F) \\ &= \mathbb{R} \oplus (E \oplus F) \oplus \Bigg((E \oplus F) \otimes (E \oplus F) \Bigg) && (8.5) \\ &\cong \mathbb{R} \oplus E \oplus F \oplus (E \otimes E) \oplus (E \otimes F) \oplus (F \otimes E) \oplus (F \otimes F). && (8.6) \end{aligned}$$

とみなす．ここではノルムを $(a,b) \in E \oplus F$, $(c,d,e,f) \in (E \otimes E) \oplus (E \otimes F) \oplus (F \otimes E) \oplus (F \otimes F)$ に対して

$$\|(a,b)\| = \max(|a|,|b|), \qquad \|(c,d,e,f)\| = \max(|c|,|d|,|e|,|f|)$$

と定める．右辺の $|\cdot|$ はユークリッドノルム, $E \otimes E$ などの元のノルムはヒルベルトシュミットノルムとする．$E \oplus F$ 上の rough path Z は

$$\begin{aligned} Z_{s,t} &= (1, X^1_{s,t}, Y^1_{s,t}, X^2_{s,t}, C(X,Y)_{s,t}, C(Y,X)_{s,t}, Y^2_{s,t}) \\ &\in \mathbb{R} \oplus E \oplus F \oplus (E \otimes E) \oplus (E \otimes F) \oplus (F \otimes E) \oplus (F \otimes F). \end{aligned} \tag{8.7}$$

のように自明な 1 を除けば 6 個の項からなる．Z の 1st level path, second level path は

$$Z^1_{s,t} = (X^1_{s,t}, Y^1_{s,t}), \quad Z^2_{s,t} = (X^2_{s,t}, C(X,Y)_{s,t}, C(Y,X)_{s,t}, Y^2_{s,t})$$

である．すでに述べたようにこの節ではノルムを

$$|Z^1_{s,t}| = \max\{|X^1_{s,t}|, |Y^1_{s,t}|\} \tag{8.8}$$

$$|Z^2_{s,t}| = \max\{|X^2_{s,t}|, |C(X,Y)_{s,t}|, |C(Y,X)_{s,t}|, |Y^2_{s,t}|\} \tag{8.9}$$

のように定める．また、第 4 項 $C(X,Y)$、5 項 $C(Y,X)$ は $E \otimes F, F \otimes E$ の元だが

$$Z = \bar{z}, \qquad z = {}^t(x,y), \qquad z \in V^1_T(E \oplus F)$$

のとき

$$C(X,Y)_{s,t} = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dy_u, \quad C(Y,X)_{s,t} = \int_s^t (y_u - y_s) \otimes dx_u \tag{8.10}$$

に相当する項である．上記の Z から $X = (1, X^1_{s,t}, X^2_{s,t})$ を取り出せばこれは E 上の rough path である．この X を Z の $\Omega(E)$(あるいは E) への射影と言い $\pi_E(Z)$ と書く．

Definition 8.1 (Rough path でドライブされた微分方程式)**.** $f \in C^2_b(F, L(E,F))$ とし $X_{s,t} = (1, X^1_{s,t}, X^2_{s,t}) \in \Omega_T(E) \quad (0 \le s \le t \le T)$ を *rough path* とする．*Rough path* $Z \in \Omega_T(E \oplus F)$ が *rough path* X で *drive* された初期値 ξ の *Rough Differential Equation (=RDE):*

$$dY_t = f(Y_t)dX_t, \qquad Y_0 = \xi, \tag{8.11}$$

の解であるとは次が成立するときに言う：

(1) $\quad Z_{s,t} = \int_s^t \hat{f}^{\xi}(Z_u)dZ_u \quad 0 \le s \le t \le T$ ($I_{\hat{f}^{\xi}}(Z)_{s,t} = Z_{s,t}$と書いても同じ)

(2) $\pi_E(Z) = X$.

この講義では、(8.11) の解を $S_{f,\xi}(X)^i_{s,t}$ あるいは f, ξ も省略して $S(X)^i_{s,t}$ と書くことにする．(解の一意性を示さないとこの *notation* はあまり意味が無いが)

Remark 8.2. $Z_{s,t} = (X^1_{s,t}, Y^1_{s,t}, X^2_{s,t}, C(X,Y)_{s,t}, C(Y,X)_{s,t}, Y^2_{s,t})$ が (8.11) の解とする．$0 \le T_0 \le T$ に対して,

$$(\theta_{T_0}Z)_{\sigma,\tau} := Z_{T_0+\sigma, T_0+\tau} \qquad 0 \le \sigma \le \tau \le T - T_0$$

は $\xi + Y^1_{0,T_0}$ を初期値,

$$(\theta_{T_0}X)_{\sigma,\tau} := X_{T_0+\sigma, T_0+\tau} \quad 0 \le \sigma \le \tau \le T - T_0$$

を driving rough path とする RDE の解である．これは解の定義から従う．これは ODE の場合も同様である．Proposition 2.15 を参照せよ．なお $(\theta_{T_0}\omega)(\sigma,\tau) := \omega(T_0+\sigma, T_0+\tau)$ は $(\theta_{T_0}X)_{\sigma,\tau}$ の control function である．

Remark 8.3 (smooth rough path の時の rough differential equation の解)**.** X が曲線 $x \in V^1_T(E)$ から決まる smooth rough path とする．すなわち $X^1_{s,t} = x_t - x_s$, $X^2_{s,t} = \int_s^t (x_u - x_s) \otimes dx_u$ とする．y_t を (8.1) の解とする．

$$dY_t = f(Y_t)dX_t, \quad Y_0 = \xi$$

の解 $S_{f,\xi}(X)$ は y_t で決まる．実際 $E \oplus F$ 上のパス $z_t = {}^t(x_t, y_t)$ から自然に決まる smooth rough path $\bar{z}_{s,t}$ が解である．すなわち $\bar{z}_{s,t} = S_{f,\xi}(X)_{s,t}$ である．これは次のようにチェックできる．Remark 7.2 より

$$\begin{aligned} I_{\hat{f}^{\xi}}(Z)^1_{s,t}\text{の } E \text{ 成分} &= x_t - x_s \\ I_{\hat{f}^{\xi}}(Z)^1_{s,t}\text{の } F \text{ 成分} &= \int_s^t f(\xi + y_u)dx_u = y_t - y_s. \end{aligned}$$

したがって $I_{\hat{f}^{\xi}}(\bar{z}) = \bar{z}$ である．

一般的に $Z \in \Omega(E \oplus F)$ のとき $\hat{f} \in C^2_b(E \oplus F, L(E \oplus F, E \oplus F))$ なので $I_{\hat{f}}(Z) \in \Omega(E \oplus F)$ である．従ってこの積分を繰り返すことができる．

$$I^0_{\hat{f}}(Z) := Z, \qquad I^n_{\hat{f}}(Z) := I_{\hat{f}}(I^{(n-1)}_{\hat{f}}(Z)) \qquad n \ge 1 \tag{8.12}$$

と定める．また $\pi_E(Z) = X$ のとき

$$\pi_E\left(I^n_{\hat{f}}(Z)\right) = X \qquad \forall n \ge 0. \tag{8.13}$$

であることに注意せよ．

Theorem 8.4 (解の存在と一意性，解の評価)**.** $f \in C_b^3(F, L(E,F))$ とする．$X = (1, X^1, X^2) \in \Omega(E)$ とする．*Control function* ω に対して

$$|X^i_{s,t}| \le \omega(s,t)^{i/p} \quad 0 \le s \le t \le T, i = 1, 2 \tag{8.14}$$

とする．
(1) (8.11) の一意的な解が存在する．
(2) $S_{f,\xi}(X)$ を *RDE* の解とする．このとき $\|\nabla^i f\|_\infty$ $(1 \le i \le 3)$ に依存する定数 $\alpha > 0$ が存在して

$$|S_{f,\xi}(X)^i_{s,t}| \quad \le \quad \alpha(1 + \omega(0,T))^2 \omega(s,t)^{i/p}, \qquad 0 \le s \le t \le T, i = 1, 2. \tag{8.15}$$

Theorem 8.5 (解の連続性定理)**.** $f \in C_b^3(F, L(E,F))$ とする．$X = (1, X^1, X^2), U = (1, U^1, U^2) \in \Omega(E)$ とし *Control function* ω に対して

$$\max\left(|X^i_{s,t}|,\ |U^i_{s,t}|\right) \quad \le \quad \omega(s,t)^{i/p} \qquad 0 \le s \le t \le T, i = 1, 2 \tag{8.16}$$

$$|X^i_{s,t} - U^i_{s,t}| \quad \le \quad \varepsilon\omega(s,t)^{i/p}, \qquad 0 \le s \le t \le T, i = 1, 2 \tag{8.17}$$

を満たすとする．
(1) $S_{f,\xi}(X), S_{f,\xi}(U)$ を *RDE* の解とする．このとき $\|\nabla^i f\|_\infty$ $(1 \le i \le 3)$ に依存する定数 $\beta, \gamma > 0$ が存在して

$$|S_{f,\xi}(X)^i_{s,t} - S_{f,\xi}(U)^i_{s,t}| \quad \le \quad \beta \exp\left(\gamma\omega(0,T)\right) \varepsilon\omega(s,t)^{i/p}, \qquad 0 \le s \le t \le T,\ i = 1, 2. \tag{8.18}$$

(2) $\xi, \eta \in F$ とする．$\|\nabla^i f\|_\infty$ $(0 \le i \le 3)$ に依存する定数 β', γ' が存在して

$$|S_{f,\xi}(X)^i_{s,t} - S_{f,\eta}(X)^i_{s,t}| \le \beta' \exp\left(\gamma'\omega(0,T)\right) |\xi - \eta| \omega(s,t)^{i/p}. \tag{8.19}$$

Remark 8.6. (1) $0 < T_0 < T$, $T_0 \le s \le t \le T$ のとき

$$S_{f,\xi}(X)_{s,t} \quad = \quad S_{f,\xi + \pi_F(S_{f,\xi})^1_{0,T_0}}(\theta_{T_0} X)_{s-T_0, t-T_0} \tag{8.20}$$

かつ $\theta_{T_0} X$ は $(\theta_{T_0}\omega)(\sigma, \tau) = \omega(\sigma + T_0, \tau + T_0)$ を *control function* とする *rough path* である．
(2) X, U の *p-variation norm* を用いると

$$\begin{aligned} &\|S_{f,\xi}(X)^i - S_{f,\xi}(U)^i\|_{i/p} \\ &\quad \le C_3(f) \exp\left\{ C_3(f) \sum_{i=1}^{2} \left(\|X^i\|_{p/i}^{p/i} + \|U^i\|_{p/i}^{p/i} \right) \right\} d_p(X, U). \end{aligned} \tag{8.21}$$

すなわち解は *driving path* の局所 *Lipschitz* 連続写像である．

Definition 8.7. $X \in \Omega(E)$ とする．$Z \in \Omega(E \oplus F)$ に対して $\pi_E(Z) = X$ となる *rough path* Z 全体を $\Omega_X(E \oplus F)$ と書く．特にその一つの元を $\hat{X} = (X^1_{s,t}, 0, X^2_{s,t}, 0, 0, 0)$ と書く．$\pi_E(Z) = X$ となる元を X をあらわに $Z(X)$ とも書くことにする．

9　短時間の場合の積分の評価

一般の g と違い $\hat{f}$ は非常に特殊な形をしているため，$\hat{f}$ による線積分は非常に特殊な性質をもつことになる．次の二つの補題，Lemma 9.1, Lemma 9.2 の等式は Definition 7.1, Lemma 7.3 の等式を $\hat{f}$ の場合に述べたに過ぎないがその特殊な形が以下の議論で重要になる．

Lemma 9.1. $\Omega_X(E \oplus F)$ の元

$$Z(X) = (1, X^1_{s,t}, Y^1_{s,t}, X^2_{s,t}, C(X,Y)_{s,t}, C(Y,X)_{s,t}, Y^2_{s,t})$$

に対して $Y_t = \xi + Y_{0,t}$ とおく．簡単のため $\hat{f^\xi}$ を $\hat{f}$ と書く．

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^1_{s,t} &= \left(X^1_{s,t}, f(Y_s)X^1_{s,t} + (\nabla f)(Y_s)C(Y,X)_{s,t}\right) & (9.1)\\ \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^2_{s,t} &= \left(X^2_{s,t}, (I \otimes f(Y_s))(X^2_{s,t}), (f(Y_s) \otimes I)(X^2_{s,t}), (f(Y_s) \otimes f(Y_s))(X^2_{s,t})\right). & (9.2) \end{aligned}$$

Lemma 9.2. $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ を分割とし $0 < l < N$ とする．

$$\begin{aligned} &\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X);D)^1_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}\left(Z(X);D \setminus \{t_l\}\right)^1_{s,t} \\ &\quad = \left(0, \int_0^1 \left(\int_0^\alpha (\nabla^2 f)(Y_{t_{l-1}} + \beta Y^1_{t_{l-1},t_l}))d\beta\right) d\alpha (Y^1_{t_{l-1},t_l})(Y^1_{t_{l-1},t_l})(X^1_{t_{l-1},t_l})\right. \\ &\qquad \left. + \int_0^1 (\nabla^2 f)(Y_{t_{l-1}} + \alpha Y^1_{t_{l-1},t_l})d\alpha (Y^1_{t_{l-1},t_l})C(Y,X)_{t_{l-1},t_l}\right). \qquad (9.3) \end{aligned}$$

$\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X);D)^2_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X);D \setminus \{t_l\})^2_{s,t}$ の explicit な表示を求めよう．まず rough path $X = (1, X^1, X^2)$ による積分のとき (7.14) のように

(i)　$X^1_{s,t}, X^2_{s,t}$ の簡単な関数でかける最初の 6 項

(ii)　1st level path の積分 $I_{f,\xi}(X)^1$ を含む最後の 3 項

がある．(i), (ii) の項は正確が違うためこれを区別して考える．$Z(X)$ の場合に (i) に相当する項の $E \otimes E, E \otimes F, F \otimes E, F \otimes F$ の 4 つの component をそれぞれを M_1, M_2, M_3, M_4 と書くことにする．また (ii) の 3 項の対応する項を N_1, N_2, N_3, N_4 と書きこれらを求める．

Lemma 9.3. $M_1 = 0$ であり

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{I \otimes \left(\int_0^1 (\nabla f)\left(Y_{t_{l-1}} + \alpha Y^1_{t_{l-1},t_l}\right)(Y^1_{t_{l-1},t_l})d\alpha\right)\right\} X^2_{t_l,t_{l+1}} \\ &\quad + X^1_{t_{l-1},t_l} \otimes \left(\int_0^1 (\nabla f)\left(Y_{t_{l-1}} + \alpha Y^1_{t_{l-1},t_l}\right)(Y^1_{t_{l-1},t_l})d\alpha\right)(X^1_{t_l,t_{l+1}}) \\ &\quad + X^1_{t_{l-1},t_l} \otimes (\nabla f)(Y_{t_l})(C(Y,X)_{t_l,t_{l+1}}), \qquad (9.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 &= \left\{\left(\int_0^1 (\nabla f)\left(Y_{t_{l-1}} + \alpha Y^1_{t_{l-1},t_l}\right)(Y^1_{t_{l-1},t_l})d\alpha\right) \otimes I\right\}(X^2_{t_l,t_{l+1}}) \\ &\quad + (\nabla f)(Y_{t_{l-1}})(C(Y,X)_{t_{l-1},t_l}) \otimes X^1_{t_l,t_{l+1}}, \qquad (9.5) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_4 &= \left\{\left(\int_0^1 (\nabla f)\left(Y_{t_{l-1}}+\alpha Y^1_{t_{l-1},t_l}\right)(Y^1_{t_{l-1},t_l})d\alpha\right)\otimes f(Y_{t_l})\right\}(X^2_{t_l,t_{l+1}})\\
&\quad+\left\{f(Y_{t_{l-1}})\otimes\left(\int_0^1 (\nabla f)\left(Y_{t_{l-1}}+\alpha Y^1_{t_{l-1},t_l}\right)(Y^1_{t_{l-1},t_l})d\alpha\right)\right\}(X^2_{t_l,t_{l+1}})\\
&\quad+f(Y_{t_{l-1}})(X^1_{t_{l-1},t_l})\otimes\left(\int_0^1 (\nabla f)\left(Y_{t_{l-1}}+\alpha Y^1_{t_{l-1},t_l}\right)(Y^1_{t_{l-1},t_l})d\alpha\right)(X^1_{t_l,t_{l+1}})\\
&\quad+f(Y_{t_{l-1}})(X^1_{t_{l-1},t_l})\otimes(\nabla f)(Y_{t_l})\left(C(Y,X)_{t_l,t_{l+1}}\right)\\
&\quad+(\nabla f)(Y_{t_{l-1}})\left(C(Y,X)_{t_{l-1},t_l}\right)\otimes f(Y_{t_l})(X^1_{t_{l-1},t_l})\\
&\quad+(\nabla f)(Y_{t_{l-1}})\left(C(Y,X)_{t_{l-1},t_l}\right)\otimes(\nabla f)(Y_{t_l})\left(C(Y,X)_{t_{l-1},t_l}\right) \qquad (9.6)
\end{aligned}
$$

Lemma 9.4. $N_1=0$.

$$
\begin{aligned}
N_2 &= X^1_{t_{l-1},t_l}\otimes\pi_F\left(I_{\hat{f}\xi}(Z(X))_{t_l,t_{l+1}}-\tilde{I}_{\hat{f}\xi}(Z(X))_{t_l,t_{l+1}}\right)^1 \qquad (9.7)\\
N_3 &= \pi_F\left(I_{\hat{f}\xi}(Z(X))_{t_{l-1},t_l}-\tilde{I}_{\hat{f}\xi}(Z(X))_{t_{l-1},t_l}\right)^1\otimes X^1_{t_l,t_{l+1}},\\
N_4 &= \pi_F\left(I_{\hat{f}\xi}(Z(X))_{t_{l-1},t_l}-\tilde{I}_{\hat{f}\xi}(Z(X))_{t_{l-1},t_l}\right)^1\otimes\pi_F\left(I_{\hat{f}\xi}(Z(X))_{t_l,t_{l+1}}-\tilde{I}_{\hat{f}\xi}(Z(X))_{t_l,t_{l+1}}\right)^1\\
&\quad+\left(f(Y_{t_{l-1}})X^1_{t_{l-1},t_l}+(\nabla f)(Y_{t_{l-1}})(C(Y,X)_{t_{l-1},t_l})\right)\pi_F\left(I_{\hat{f}\xi}(Z(X))_{t_l,t_{l+1}}-\tilde{I}_{\hat{f}\xi}(Z(X))_{t_l,t_{l+1}}\right)^1\\
&\quad+\pi_F\left(I_{\hat{f}\xi}(Z(X))_{t_{l-1},t_l}-\tilde{I}_{\hat{f}\xi}(Z(X))_{t_{l-1},t_l}\right)^1\otimes\left(f(Y_{t_l})X^1_{t_l,t_{l+1}}+(\nabla f)(Y_{t_l})(C(Y,X)_{t_l,t_{l+1}})\right). \qquad (9.8)
\end{aligned}
$$

以下解の存在, 連続性定理の証明で重要な Lemma を述べるが Young 積分の場合と対比すると次のような対応関係がある.

- Lemma 9.5, Lemma 9.7 $\Longleftrightarrow$ Lemma 2.17
- Lemma 9.9 $\Longleftrightarrow$ Lemma 2.18
- Lemma 9.11 $\Longleftrightarrow$ Lemma 2.19

Lemma 9.5. $X\in\Omega_{p,T}(E)$ とする. ω を *control function* とし,

$$|X^i_{s,t}|\le\omega(s,t)^{i/p}\qquad 0\le s\le t\le T, i=1,2 \qquad (9.9)$$

とする. $K(f)=\max\{1,\|f\|_\infty,\|f\|_\infty^2\}$ とおき $C>K(f)$ とする.

(1) $\delta_1=\delta_1(C,K(f),C_2(f))(\le 1)$ が存在して $\omega(0,T')\le\delta_1$ となる任意の T' について次の主張が成立する: $Z(X)\in\Omega_{p,T'}(E\oplus F)$ が

$$|Z(X)^i_{s,t}|\le C\omega(s,t)^{i/p}\quad 0\le s\le t\le T', i=1,2 \qquad (9.10)$$

を満たせば

$$\left|I_{\hat{f}}(Z(X))^i_{s,t}\right|\le C\omega(s,t)^{i/p}\quad 0\le s\le t\le T',\quad i=1,2. \qquad (9.11)$$

(2) $C=2K(f)$ のとき, (1) の δ_1 として $\delta_1=\frac{1}{1+C_2(f)}$ と取れる.

Remark 9.6. $Z(X) = \hat{X}$ のとき (9.10) が $C = 1$ で成立するので $Z(X) = I_{\hat{f}}^n(\hat{X})$ $(n \geq 0)$ について同じ δ_1 を用いて Lemma が適用できる．

線積分という操作は局所リプシッツ連続写像ということを示したが，以下の補題は $\Omega_X(E \oplus F)$ 上で制限して考えると時間間隔が十分小さい時，線積分が縮小写像となることを示している．従って標準的な議論で，短い時間間隔では rough differential equation に解が存在することが示される．また，適当に control function を構成する必要があるが，解の一意性もこの縮小性を用いて証明される．

Lemma 9.7. $X \in \Omega_{p,T}(E)$ とし，*control function* ω に対して

$$|X_{s,t}^i| \leq \omega(s,t)^{i/p} \qquad 0 \leq s \leq t \leq T, i = 1,2 \tag{9.12}$$

とする．
(1) $0 < \rho < 1,\ C > 0,\ C' > 0$ とする．このとき正数 $\delta_2 = \delta_2(C, C_3(f), \rho)(\leq 1)$ が存在して $\omega(0,T') \leq \delta_2$ をみたす任意の T' について次の主張が成立する：
$Z(X), W(X) \in \Omega_{p,T'}(E \oplus F)$ が

$$\begin{aligned} \max\left\{|Z(X)_{s,t}^i|, |W(X)_{s,t}^i|\right\} &\leq C\omega(s,t)^{i/p} \qquad 0 \leq s \leq t \leq T',\ i = 1,2 \\ \left|Z(X)_{s,t}^i - W(X)_{s,t}^i\right| &\leq C'\omega(s,t)^{i/p} \end{aligned} \tag{9.13}$$

をみたすとする．このとき

$$\left|I_{\hat{f}}(Z(X))_{s,t}^i - I_{\hat{f}}(W(X))_{s,t}^i\right| \leq \rho C'\omega(s,t)^{i/p} \quad 0 \leq s \leq t \leq T', i = 1,2. \tag{9.14}$$

(2) $C = 2K(f)$ のとき $\delta_2 = \frac{\rho}{1+C_3(f)}$ とできる．

Remark 9.8. 上記 *Lemma* で δ_2 は C' に依存しないことが重要である．

Lemma 9.9. $X, U \in \Omega_{p,T}(E)$ とする．*Control function* ω が存在して

$$\begin{aligned} \max\left\{|X_{s,t}^i|, |U_{s,t}^i|\right\} &\leq \omega(s,t)^{i/p} \quad 0 \leq s \leq t \leq T, i = 1,2 \\ \left|X_{s,t}^i - U_{s,t}^i\right| &\leq \varepsilon\omega(s,t)^{i/p}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, i = 1,2 \end{aligned} \tag{9.15}$$

とする．$K(f) = \max\left\{1, \|f\|_\infty, \|f\|_\infty^2\right\}$ と定め，$K > K(f)$ とする．
(1) $\delta_3 = \delta_3(K, C, C_3(f))(\leq 1)$ が存在して次の主張が成立する:
$\omega(0,T') \leq \delta_3$ となる T' に対して $Z(X), Z(U) \in \Omega_{p,T'}(E \oplus F)$ が

$$\max\left\{|Z(X)_{s,t}^i|, |Z(U)_{s,t}^i|\right\} \leq C\omega(s,t)^{i/p}, 0 \leq s \leq t \leq T', i = 1,2. \tag{9.16}$$

$$|Z(X)_{s,t}^i - Z(U)_{s,t}^i| \leq K\varepsilon\omega(s,t)^{i/p} \quad 0 \leq s \leq t \leq T', i = 1,2, \tag{9.17}$$

を満たせば

$$\left|I_{\hat{f}}(Z(X))_{s,t}^i - I_{\hat{f}}(Z(U))_{s,t}^i\right| \leq K\varepsilon\omega(s,t)^{i/p} \quad 0 \leq s \leq t \leq T', i = 1,2. \tag{9.18}$$

(2) $C = K = 2K(f)$ ならば (1) の δ_3 として $\delta_3 = \frac{1}{1+C_3(f)}$ のように取れる．

Remark 9.10. Lemma 9.5, Lemma 9.9 によると C と δ を適当に取ると $\omega(0,T') \le \delta$ を満たす短時間の範囲で (9.15), (9.16),(9.17) をみたす rough path のペア $(Z(X), Z(U))$ 全体の集合は $\Omega(E \oplus F) \times \Omega(E \oplus F)$ の閉部分集合かつ $\hat{f}$ による線積分の変換で不変な集合である．

X, U が条件 (9.15) をみたすとする．$Z(X) = \hat{X}, Z(U) = \hat{U}$ とする．(9.16), (9.17) がそれぞれ $C = 1$, $K = 2K(f)$ で成立する．従って $Z(X) = I^n_{\hat{f}}(\hat{X}), Z(U) = I^n_{\hat{f}}(\hat{Z})$ $(n \ge 1)$ について同じ δ_4 を用いて繰り返し Lemma が適用できる．

Lemma 9.11. $X \in \Omega_{p,T}(E)$ とする．*Control function* ω が存在して

$$|X^i_{s,t}| \le \omega(s,t)^{i/p}, \quad 0 \le s \le t \le T, i = 1, 2 \tag{9.19}$$

とする．$K(f) = \max\left\{1, \|f\|_\infty, \|f\|^2_\infty\right\}$, $\tilde{K}(f) = \max\{1, \|\nabla f\|_\infty, 2\|f\|_\infty \|\nabla f\|_\infty\}$ とおく．$\xi, \eta \in F$ とする．

(1) $\delta_4 = \frac{1}{1+C_3(f)}$ が存在して次の主張が成立する：
$\omega(0,T') \le \delta_4$ をみたす T' を固定し $Z(X), W(X) \in \Omega_{p,T'}$ について

$$\begin{aligned} \max\{|Z(X)^i_{s,t}|, |W(X)^i_{s,t}|\} &\le 2K(f)\omega(s,t)^{i/p}, \quad 0 \le s \le t \le T', i = 1, 2 & (9.20) \\ |Z(X)^i_{s,t} - W(X)^i_{s,t}| &\le 2\tilde{K}(f)|\xi - \eta|\omega(s,t)^{i/p} \quad 0 \le s \le t \le T', i = 1, 2 & (9.21) \end{aligned}$$

となるとすると

$$|I_{\hat{f}^\xi}(Z(X))^i_{s,t} - I_{\hat{f}^\eta}(W(X))^i_{s,t}| \le 2\tilde{K}(f)|\xi - \eta|\omega(s,t)^{i/p} \quad 0 \le s \le t \le T', i = 1, 2. \tag{9.22}$$

Remark 9.12 (Lemma 9.5, Lemma 9.7, Lemma 9.11, Lemma 9.9 の証明について)**.** 上記の Lemma 9.5, Lemma 9.7, Lemma 9.11, Lemma 9.9 の証明は本質的にラフパスに対する積分の連続性定理の証明と同じである．$0 < s < t < T$ とし $[s,t]$ の分割 $D = \{s = t_0 < \cdots < t_N = t\}$ を取る．Lemma 2.10 のように時間の列を一つづつ選びその時刻を抜いて得られる分割を

$$D_0, D_1, \ldots, D_{N-1}$$

とする．$D_0 = D$, $D_{N-1} = \{s = t_0 < t_1 = t\}$ である．

$$\begin{aligned} &\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X); D)^i_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^i_{s,t} \\ &\quad = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X); D_{k-1})^i_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X); D_k)^i_{s,t} \right). \end{aligned} \tag{9.23}$$

明らかに

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X); D)^i_{s,t}| &\le |\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^i_{s,t}| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} \left| \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X); D_{k-1})^i_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X); D_k)^i_{s,t} \right|. \end{aligned} \tag{9.24}$$

(9.24) は Lemma 9.5 の証明で用いる．また, 二つの rough path X, U に対して

$$J^i_1 = \left| \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^i_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(U))^i_{s,t} \right| \tag{9.25}$$

$$
\begin{aligned}
J_2^i &= \sum_{k=1}^{N-1} \Big| \Big(\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X); D_{k-1})^i_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X); D_k)^i_{s,t} \Big) \\
&\quad - \Big(\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(U); D_{k-1})^i_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(U); D_k)^i_{s,t} \Big) \Big|
\end{aligned} \tag{9.26}
$$

とおくと

$$
\left| \tilde{I}_{\hat{f}}\left(Z(X); D\right)^i_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}\left(Z(U); D\right)^i_{s,t} \right| \le J_1^i + J_2^i. \tag{9.27}
$$

(9.27) は Lemma 9.9, Lemma 9.7, Lemma 9.11 の証明で用いられる．ただし Lemma 9.11 の証明ではラフパスが異なるのみならず初期値も違うが同じように評価すればよい．以下これらの Lemma を証明しよう．

Proof of Lemma 9.5. 1st level path を評価する．まず

$$
|\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^1_{s,t}| \le \Big(K(f) + C_1(f) C \omega(s,t)^{1/p} \Big) \omega(s,t)^{1/p}. \tag{9.28}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N-1} \left| \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X); D_{k-1})^1_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X); D_k)^1_{s,t} \right| &\le \sum_{k=1}^{N-1} C_2(f) C^2 \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k} \right)^{3/p} \\
&\le C_2(f) C^2 \zeta \left(\frac{3}{p} \right) \omega(s,t)^{3/p}.
\end{aligned} \tag{9.29}
$$

したがって $\omega(0,T') \le 1$ かつ

$$
\left(C_1(f) + C_2(f) \zeta \left(\frac{3}{p} \right) C \right) \omega(0,T')^{1/p} \le 1 - \frac{K(f)}{C} \tag{9.30}
$$

となっていれば (9.11) が成立する．次に 2nd level path の評価を行う．

$$
|\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^2_{s,t}| \le K(f) \omega(s,t)^{2/p}. \tag{9.31}
$$

M_i, N_i $(i = 2, 3, 4)$ を評価して

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N-1} \left| \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X); D_{k-1})^2_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X); D_k)^2_{s,t} \right| \\
&\qquad \le C(1+C) \zeta \left(\frac{3}{p} \right) \Big(C_1(f) + C^{3/p} C_2(f) (1 + \omega(s,t)^{3/p}) \Big) \omega(s,t)^{3/p}.
\end{aligned} \tag{9.32}
$$

したがって $\omega(0,T') \le 1$ かつ

$$
(1+C) \zeta \left(\frac{3}{p} \right) \Big(C_1(f) + 2C^{3/p} C_2(f) \Big) \omega(0,T')^{1/p} \le 1 - \frac{K(f)}{C} \tag{9.33}
$$

であれば (9.11) が成立する．以上より (9.30), (9.33) が求める条件である． □

Proof of Lemma 9.7.

$$\begin{aligned}\left|\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^1_{s,t}-\tilde{I}_{\hat{f}}(W(X))^1_{s,t}\right| &\le C_1(f)C'\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p}+C_2(f)C'C\omega(0,s)^{1/p}\omega(s,t)^{2/p}\\ &\quad +C_1(f)C'\omega(s,t)^{2/p}\\ &\le C'\omega(s,t)^{1/p}C_2(f)(\omega(0,t)^{1/p}+C\omega(0,t)^{2/p}) \end{aligned}\tag{9.34}$$

次に (9.26) の $Z(U)$ を $W(X)$ で置き換えた式を用い、残りの項を評価すると

$$\begin{aligned}&\left|\left(\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X);D)^1_{s,t}-\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^1_{s,t}\right)-\left(\tilde{I}_{\hat{f}}(W(X);D)^1_{s,t}-\tilde{I}_{\hat{f}}(W(X))^1_{s,t}\right)\right|\\ &\le C'\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\omega(s,t)^{3/p}\Big(3CC_2(f)+C_3(f)\omega(0,t)^{1/p}(C^2+1)\Big).\end{aligned}\tag{9.35}$$

したがって $\omega(0,T')\le 1$ かつ

$$\omega(0,T')^{1/p}\left\{C_2(f)(1+C)+\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\Big(3CC_2(f)+C_3(f)(C^2+1)\Big)\right\}\le\rho. \tag{9.36}$$

ならば $i=1$ に対して (9.11) が成立する．次に $i=2$ に対して考察を行う．

$$\left|\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^2_{s,t}-\tilde{I}_{\hat{f}}(W(X))^2_{s,t}\right| \le C_1(f)C'\omega(s,t)^{2/p}\omega(0,t)^{1/p}. \tag{9.37}$$

また

$$\begin{aligned}&\left|\left(\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X);D)^2_{s,t}-\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^2_{s,t}\right)-\left(\tilde{I}_{\hat{f}}(W(X);D)^2_{s,t}-\tilde{I}_{\hat{f}}(W(X))^2_{s,t}\right)\right|\\ &\quad\le C'\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\omega(s,t)^{3/p}\Big\{C_1(f)+CC_2(f)+\omega(0,t)^{1/p}\left(C_1(f)+CC_2(f)\right)+C^2C_2(f)\omega(0,t)^{2/p}\\ &\qquad\qquad +C_3(f)(\omega(s,t)^{1/p}+\omega(s,t)^{3/p})\Big\}.\end{aligned}\tag{9.38}$$

ゆえに $\omega(0,T')\le 1$ かつ

$$\omega(0,T')^{1/p}\left\{C_1(f)+\zeta\left(\frac{3}{p}\right)\Big(2C_1(f)+2CC_2(f)+C^2C_2(f)+2C_3(f)\Big)\right\}\le\rho \tag{9.39}$$

ならば $i=2$ について (9.11) が成立する．以上の評価より δ_2 が定まる．δ_2 が C' に依存しないのは明らかである．(2) の証明も以上の評価から明らかである．□

Proof of Lemma 9.9. まず 1st level path の評価を与える．$0<s<t<T'$ で $\omega(0,T')\le 1$ とする．(9.3)(9.27) より

$$\begin{aligned}J_1^1 &\le \varepsilon\max\Big\{\omega(s,t)^{1/p},K(f)\omega(s,t)^{1/p}+C_1(f)K\omega(0,t)^{1/p}C\omega(s,t)^{1/p}\\ &\qquad +C_2(f)\omega(0,t)^{1/p}C\omega(s,t)^{2/p}+C_1(f)K\omega(s,t)^{2/p}\Big\}\\ &\le \varepsilon\Big(K(f)+CC_1(f)K\omega(0,t)^{1/p}+C_2(f)\omega(0,t)^{1/p}\omega(s,t)^{1/p}+C_1(f)K\omega(s,t)^{1/p}\Big)\omega(s,t)^{1/p}\\ &\le \varepsilon K\omega(s,t)^{1/p}\left(\frac{K(f)}{K}+\left(CC_1(f)+C_2(f)+C_1(f)\right)\omega(0,T')^{1/p}\right).\end{aligned}\tag{9.40}$$

上記評価では $K \geq 1$ を用いている．次に J_2^1 を評価する．ここには E の component は出てこない．

$$\begin{aligned}
J_2^1 &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{N-1} \Big\{ C_2(f)C + C_2(f)KC + C_2(f)KC \\
&\quad + C_3(f)C^2 K\omega(0,t)^{1/p} + 2C_2(f)CK + C_3(f)C^2 K\omega(0,t)^{1/p} \Big\} \left(\frac{2\omega(s,t)}{N-k} \right)^{3/p} \\
&\leq K\varepsilon\omega(s,t)^{1/p} \Big\{ 3C_2(f)C\omega(s,t)^{2/p} + C_3(f)C^2\omega(0,t)^{1/p}\omega(s,t)^{2/p} \\
&\quad + 2C_2(f)\omega(s,t)^{2/p} + C_3(f)C^2\omega(0,t)^{2/p}\omega(s,t)^{1/p} \Big\} \zeta\left(\frac{3}{p}\right). \qquad (9.41)
\end{aligned}$$

したがって $\omega(0,T') \leq 1$ かつ

$$\{(CC_1(f) + C_1(f)) + C_2(f)\}\,\omega(0,T')^{1/p} \leq 1 - \frac{K(f)}{K} \qquad (9.42)$$

$$\Big\{(3C_2(f)C + 2C_2(f)) + 2C_3(f)C^2\Big\}\,\omega(0,T')^{2/p}\zeta\left(\frac{3}{p}\right) \leq 1 \qquad (9.43)$$

のとき (9.18) が成立する．次に $i=2$ の時を考える．まず J_1^2 は

$$\begin{aligned}
J_1^2 &\leq \varepsilon \max\Big\{ \omega(s,t)^{2/p}, K(f)\omega(s,t)^{2/p} + C_1(f)C\omega(0,t)^{1/p}\omega(s,t)^{2/p}, \\
&\quad 2C_1(f)K(f)C\omega(0,t)^{1/p}\omega(s,t)^{2/p} \Big\} \\
&\leq \varepsilon\omega(s,t)^{2/p} \left\{ K(f) + CC_1(f)\,(2K(f)+1)\,\omega(0,t)^{1/p} \right\} \\
&\leq \varepsilon K\omega(s,t)^{2/p} \left\{ \frac{K(f)}{K} + 3CC_1(f)\omega(0,t)^{1/p} \right\}. \qquad (9.44)
\end{aligned}$$

次に J_2^2 を Lemma 9.3, Lemma 9.4 の M_i, N_i を $Z(X), Z(U)$ それぞれについて計算し, その差を用いて評価すると

$$\begin{aligned}
J_2^2 &\leq \varepsilon K\omega(s,t)^{3/p}\zeta\left(\frac{3}{p}\right) \max\Big\{ C_3(f)\left(5C + 1 + C\omega(0,t)^{1/p} + \omega(s,t)^{1/p}\right), \\
&\quad \omega(0,t)^{1/p}C(1+C)C_2(f)K(f) + C_3(f)(C+1) \Big\}. \qquad (9.45)
\end{aligned}$$

したがって $\omega(0,T') \leq 1$ かつ

$$3CC_1(f)\omega(0,T')^{1/p} \leq 1 - \frac{K(f)}{K} \qquad (9.46)$$

$$C_3(f)\,(5C + 1 + (C+1))\,\omega(0,T')^{1/p}\zeta\left(\frac{3}{p}\right) \leq 1 \qquad (9.47)$$

$$(C(1+C)C_2(f)K(f) + C_3(f)(C+1))\,\omega(0,T')^{1/p}\zeta\left(\frac{3}{p}\right) \leq 1 \qquad (9.48)$$

ならば (9.18) が成立する．結局 (9.42), (9.43), (9.46), (9.47), (9.48) となるよう T' を取ればよいことになる． □

Lemma 9.11 の証明．$0 \le s \le t \le T'$, $\omega(0,T') \le 1$ の範囲で考える．まず 1st level path の評価を行う．E の元は 0 である．$R = |\xi - \eta|$ と書く．

$$\begin{aligned}
&\left|\tilde{I}_{\hat{f}\xi}(Z(X))^1_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}\eta}(W(X))^1_{s,t}\right| \\
&\quad \le R\omega(s,t)^{1/p}\Biggl\{\left(\|\nabla f\|_\infty + 2\tilde{K}(f)\|\nabla f\|_\infty \omega(0,s)^{1/p}\right) \\
&\quad +2\left(1+2\omega(0,s)^{1/p}\tilde{K}(f)\right)K(f)\|\nabla^2 f\|_\infty \omega(s,t)^{1/p} + 2\tilde{K}(f)\|\nabla f\|_\infty \omega(s,t)^{1/p}\Biggr\} \\
&\quad \le 2\tilde{K}(f)R\omega(s,t)^{1/p}\Biggl\{\frac{1}{2} + \left(\|\nabla f\|_\infty + (1+2\omega(0,s)^{1/p})K(f)\|\nabla^2 f\|_\infty\right)\omega(0,t)^{1/p} \\
&\qquad\qquad +\|\nabla f\|_\infty \omega(s,t)^{1/p}\Biggr\}.
\end{aligned} \tag{9.49}$$

また

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\tilde{I}_{\hat{f}\xi}(Z(X);D)^1_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}\xi}(Z(X))^1_{s,t}\right) - \left(\tilde{I}_{\hat{f}\eta}(W(X);D)^1_{s,t}\tilde{I}_{\hat{f}\eta}(W(X))^1_{s,t}\right)\right| \\
&\quad \le C_3(f)R(1+\omega(s,t)^{3/p})\omega(s,t)^{3/p}.
\end{aligned} \tag{9.50}$$

したがって $0 \le s \le t \le T'$, $\omega(0,T') \le 1$ ならば

$$\left|\tilde{I}_{\hat{f}\xi}(Z(X);D)^1_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}\eta}(W(X);D)^1_{s,t}\right| \le 2\tilde{K}(f)R\omega(s,t)^{1/p}\left(\frac{1}{2} + C_3(f)\omega(0,T')^{1/p}\right). \tag{9.51}$$

次に 2nd level path の評価を行う．

$$\left|\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^2_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}(W(X))^2_{s,t} \text{ の } E\otimes F \text{ の要素}\right| \le R\omega(s,t)^{2/p}\|\nabla f\|_\infty\left(1+2\tilde{K}(f)\omega(0,s)^{1/p}\right). \tag{9.52}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\tilde{I}_{\hat{f}}(Z(X))^2_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}}(W(X))^2_{s,t} \text{ の } F\otimes F \text{ の要素}\right| \\
&\quad \le 2R\omega(s,t)^{2/p}\|\nabla f\|_\infty\|f\|_\infty\left(1+2\tilde{K}(f)\omega(0,s)^{1/p}\right).
\end{aligned} \tag{9.53}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\tilde{I}_{\hat{f}\xi}(Z(X);D)^2_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}\xi}(Z(X))^2_{s,t}\right) - \left(\tilde{I}_{\hat{f}\eta}(W(X);D)^2_{s,t} - \tilde{I}_{\hat{f}\eta}(W(X))^2_{s,t}\right) \text{ の } E\otimes F \text{ の要素}\right| \\
&\quad \le C_3(f)R\omega(s,t)^{3/p}.
\end{aligned} \tag{9.54}$$

ゆえに $C_3(f)$ を適当に取り

$$\omega(0,T')^{1/p} \le \frac{1}{1+C_3(f)} \tag{9.55}$$

とすると (9.22) が成立する． □

10 解の存在と一意性

$X=\bar{x}$ のように区分的に C^1 なパスから決まる smooth rough path のときは (8.11) の解は (8.1) の解から決まるものが存在するので、解の存在は自明である[2]. 一般の rough path の時は

(1) Lemma 9.5, Lemma 9.7 を用いて短時間の範囲での解の存在を示す.

(2) (1) で得られた解をつなぎ合わせて $[0,T]$ の全時間範囲での解を構成する.

(3) Lemma 9.7 を用いて解の一意性を示す.

の順番で示す.

10.1 短時間の範囲での解の存在

Lemma 10.1. *$C_3(f)$ が存在して $\omega(0,T')\le\frac{1}{1+C_3(f)}$ をみたす T' を取ると $[0,T']$ の範囲で (8.11) の解 $S_{f,\xi}(X)$ で評価*

$$|S_{f,\xi}(X)^i_{s,t}|\le 4K(f)\omega(s,t)^{i/p}\quad 0\le s\le t\le T' \tag{10.1}$$

をみたすものが存在する.

Proof. $Z_0(X)=\hat{X}, Z_n(X)=I_{\hat{f}\xi}(Z_{n-1}(X))$ $(n\ge1)$ と定める. 仮定から

$$|Z_0(X)^i_{s,t}|\le\omega(s,t)^{i/p}\le 2K(f)\omega(s,t)^{i/p}\quad 0\le s\le t\le T, i=1,2 \tag{10.2}$$

である. Lemma 9.5 より適当に $C_2(f)$ を取り $\omega(0,T')\le\frac{1}{1+C_2(f)}$ とするとすべての n について

$$|Z_n(X)^i_{s,t}| \quad\le\quad 2K(f)\omega(s,t)^{i/p}\quad 0\le s\le t\le T', i=1,2 \tag{10.3}$$

従ってすべての n について

$$|Z_n(X)^i_{s,t}-Z_{n+1}(X)^i_{s,t}| \quad\le\quad 4K(f)\omega(s,t)^{i/p}\quad 0\le s\le t\le T', i=1,2. \tag{10.4}$$

$0<\rho<1$ を固定する. Lemma 9.7 より適当に $C_3(f)$ を取り, さらに T' を $\omega(0,T')\le\frac{1}{1+C_3(f)}$ をみたすように小さく取ると

$$|Z_n(X)^i_{s,t}-Z_{n+1}(X)^i_{s,t}| \quad\le\quad 4K(f)\rho^n\omega(s,t)^{i/p}\quad 0\le s\le t\le T', i=1,2. \tag{10.5}$$

そこで

$$Z_\infty(X)^i_{s,t}:=\lim_{n\to\infty}Z_n(X)^i_{s,t}\quad 0\le s\le t\le T',\ i=1,2 \tag{10.6}$$

と定める.

(i) $Z_\infty(X)_{s,t}$ が Chen の恒等式をみたすこと

[2]ただし解の一意性は自明ではない. なぜなら解の範囲が拡張されているからである.

(ii) $Z_\infty(X)_{s,t}$ が

$$|Z_\infty(X)^i_{s,t}| \le \left(1+\frac{4\rho K(f)}{1-\rho}\right)\omega(s,t)^{i/p} \quad 0\le s\le t\le T' \tag{10.7}$$

をみたす.

(iii) $I_{\hat{f}^\xi}(Z_\infty(X))^i_{s,t} = Z_\infty(X)^i_{s,t} \quad (0\le s\le t\le T',\ i=1,2)$

がチェックできるので $Z_\infty(X)$ が $[0,T']$ での解であることがわかる. 上記の中で (iii) は積分の連続性定理から従う. (i), (ii) は明白である. 求める評価は $\rho=1/2$ の場合とすればよい. □

Remark 10.2. まだ一意性を示していないが $X=\bar{x}$ の *smooth rough path* のときは上記の方法で構成された解は *(8.1)* の解から自然に決まるラフパスと同じであることは明らかであろう.

10.2 解の接続

前の小節で得られた解を接続して $[0,T]$ での大域的な解を構成する.

実はより一般に 0 からスタートするパスが有限本与えられた時それをつないで 1 つのパスを得ることができる. ラフパスの場合も有限個のラフパスが与えられた時, それらをつなげることができる. ラフパス, control function のずらしを

$$(\theta_u\omega)(s,t)=\omega(u+s,u+t), \quad (\theta_u X)_{s,t}=X_{u+s,u+t}$$

のように定義する.

Proposition 10.3. $[0,T]$ の分割

$$D=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<t_N=T\}$$

が与えられたとする. ω を $[0,T]$ 上定義された *control function* とする. $[0,t_i-t_{i-1}]$ 上の *control function* $\omega_i(s,t)=C_i(\theta_{t_{i-1}}\omega)(s,t) \quad (1\le i\le N)$ を持つ *p-rough path*

$$X(i)_{\sigma,\tau}=(1,X(i)^1_{\sigma,\tau},X(i)^2_{\sigma,\tau}))_{0\le\sigma\le\tau\le t_i-t_{i-1}}\in\Omega_{p,t_i-t_{i-1}}(E)$$

が与えられたとする. $t_{i-1}\le s<t_i\cdots<t_{j-1}<t\le t_j \ (i<j)$ のとき

$$s_{i-1}=s,\ s_i=t_i,\ldots,s_{j-1}=t_{j-1},\ s_j=t$$

とおいて $X_{s,t}$ を

$$X^1_{s,t} = \sum_{k=i}^{j} X(k)^1_{s_{k-1}-t_{k-1},s_k-t_{k-1}} \tag{10.8}$$

$$\begin{aligned} X^2_{s,t} &= \sum_{k=i}^{j} X(k)^2_{s_{k-1}-t_{k-1},s_k-t_{k-1}} \\ &\quad + \sum_{i\le k<l\le j} X(k)^1_{s_{k-1}-t_{k-1},s_k-t_{k-1}}\otimes X(l)^1_{s_{l-1}-t_{l-1},s_l-t_{l-1}} \end{aligned} \tag{10.9}$$

と定めると $(1,X^1_{s,t},X^2_{s,t})\ (0\le s\le t\le T)$ は $\omega_*(s,t)=N^p\max\{1,C_1,\ldots,C_N\}\omega(s,t)$ を *control function* としてもつ *p-rough path* を定める.

Definition 10.4. 上記の命題のように得られたラフパス X をラフパス $X(i)$ を接続して得られるラフパスと呼ぶ.

Remark 10.5. *Smooth rough path* の場合に上記命題の意味を説明する．命題で与えられた t_i を取る．$x(i) = (x(i)_t)_{0 \le t \le t_i - t_{i-1}}$ $(1 \le i \le N)$ は $V^1_{t_i - t_{i-1}}(E)$ の元とする．

$$x_t = (\sum_{k=1}^{i} x(k)_{t_k - t_{k-1}}) + x(i+1)_{t-t_i} \qquad t_i \le t \le t_{i+1} \quad 0 \le i \le N-1 \tag{10.10}$$

のように $x(i)$ をつないで得られる $[0,T]$ で定義されたパス x を考える．このとき $\bar{x}$ が N 個の *smooth rough path* $\overline{x(i)}$ をつないで得られる *rough path* に他ならない.

Lemma 10.6. $[0,T]$ で (8.11) に解 Z が存在し,

$$\left|Z^i_{s,t}\right| \le C_3(f)(1+\omega(0,T))^i \omega(s,t)^{i/p} \quad 0 \le s \le t \le T, i = 1,2 \tag{10.11}$$

をみたす.

Proof. Lemma 10.1 で出てきた $C_3(f)$ を取る．時間列

$$0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_N = T \tag{10.12}$$

を $T_{j+1} = \sup\{t \ge T_j \mid \omega(T_j,t) \le \frac{1}{1+C_3(f)}\}$ となるように取る．inf を取る範囲が空集合のときは $T_{j+1} = T$ と定め, $N = j+1$ とする．$N \ge 2$ ならば $\omega(T_{j-1},T_j) = \frac{1}{1+C_3(f)}$ $(0 \le j \le N-1)$ と Super-additivity

$$\sum_{j=1}^{N} \omega(T_{j-1},T_j) \le \omega(0,T)$$

から $\frac{N-1}{1+C_3(f)} \le \omega(0,T)$．したがって

$$N - 1 \le (1 + C_3(f))\omega(0,T) \tag{10.13}$$

となりこの操作は有限回で終わる．$[0, T_j - T_{j-1}]$ $(1 \le j \le N)$ 上の rough path $Z(j)$ を次のように帰納的に定める.

(i) $j = 1$ の時, $Z(j)_{s,t} = S_{f,\xi}(X)_{s,t}$ $(0 \le s \le t \le T_1)$

(ii) $Z(k)$ $(1 \le k \le j < N)$ が定まったとし $Z(j+1)_{s,t}$ $(0 \le s \le t \le T_{j+1} - T_j)$ を

$$Z(j+1)_{s,t} = S_{f,\xi+\sum_{l=1}^{j}(\pi_F Z(l)^1_{0,T_l - T_{l-1}})}((\theta_{T_j}X)) \quad 0 \le s \le t \le T_{j+1} - T_j \tag{10.14}$$

と定める．ここで

$$(\theta_{T_j}X)_{s,t} := X_{T_j+s,T_j+t} \quad 0 \le s \le t \le T_{j+1} - T_j. \tag{10.15}$$

$Z(1),\ldots,Z(N)$ をこの順番で接続して得られる rough path を Z とするとこれが求める解である. $\theta_{T_k}X$ は $(\theta_{T_k}\omega)$ を control function とするので Lemma 10.1 より $Z(k)$ は

$$Z(k)^i_{s,t} \le 4K(f)(\theta_{T_k}\omega)(s,t)^{i/p} \tag{10.16}$$

の評価をもつ．したがって Proposition 10.3 と N に対する評価から評価が従う． □

10.3 解の一意性

解の一意性を示す．$Z_{s,t}, W_{s,t} \in \Omega_T(E \oplus F)$ が初期値 ξ, X で drive された RDE の解としそれぞれ control fucntion を ω_Z, ω_W とする．$\omega(s,t) = \omega_Z(s,t) + \omega_W(s,t)$ と定めると ω は Z, W の control function になる．また

$$\left|Z^i_{s,t} - W^i_{s,t}\right| \quad \leq \quad 2\omega(s,t)^{i/p} \quad 0 \leq s \leq t \leq T, i = 1, 2. \tag{10.17}$$

$I_{\hat{f}}(Z) = Z$, $I_{\hat{f}}(W) = W$ である．Lemma 9.5, Lemma 9.7 のように δ_1, δ_2 を取り $\omega(0,T') \leq \min(\delta_1, \delta_2)$ となるように取り繰り返し (1) の評価を適用すれば任意の n について

$$|Z^i_{s,t} - W^i_{s,t}| \quad \leq \quad 2\rho^n \omega(s,t)^{i/p} \quad 0 \leq s \leq t \leq T'. \tag{10.18}$$

従って

$$Z^i_{s,t} = W^i_{s,t} \qquad 0 \leq s \leq t \leq T'.$$

$(\theta_{T'}Z)_{s,t}$, $(\theta_{T'}W)_{s,t}$ は同じ初期値 $\xi + \pi_F(Z)^1_{0,T'}$ を持ち $(\theta_{T'}X)_{s,t}$ で drive された RDE の解だから同じ議論を繰り返していけばよい．この操作が有限回で時刻 T に達するのは δ_i が $C_3(f), \rho$ にのみ依存すること, ω が super-additive なことによる．

11 連続性定理の証明

11.1 短時間での連続性定理

Lemma 11.1. *X, U を E 上の p-rough path とする．$\omega(s,t)$ を X, U 共通の control function で $\varepsilon > 0$ が存在して*

$$\left|X^i_{s,t} - U^i_{s,t}\right| \quad \leq \quad \varepsilon\omega(s,t)^{i/p}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, i = 1, 2. \tag{11.1}$$

とする．$\delta = \frac{1}{1+C_3(f)}$ を適当に取ると $\omega(0,T') \leq \delta$ をみたすとき

$$\left|S_{f,\xi}(X)^i_{s,t} - S_{f,\xi}(U)^i_{s,t}\right| \quad \leq \quad 2\varepsilon K(f)\omega(s,t)^{i/p}. \quad 0 \leq s \leq t \leq T', i = 1, 2. \tag{11.2}$$

Proof.

$$Z(X) = \hat{X}, \quad W(X) = I_{\hat{f}}(\hat{X}), \quad Z(U) = \hat{U}, \quad W(U) = I_{\hat{f}}(\hat{U}) \tag{11.3}$$

と定める．さらに

$$C = 2K(f), \quad C' = 4K(f), \quad K = 2K(f) \tag{11.4}$$

と定める．Lemma 9.5 の C を上記のものとして δ_1 を取る．次に Lemma 9.7 の C, C' を上記 C, C' にしたときの δ_2 を取る．これは $Z(U), W(U)$ の場合も同じ δ_2 になる．さらに Lemma 9.9 の K を上記 K とした時の δ_3 を取る．$\tilde{\delta}_1(f) = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ とおく．$Z_n(X) = I_{\hat{f}}(Z_{n-1}(X))$, $Z_1(X) = Z(X)$, $Z_n(U) = I_{\hat{f}}(Z_{n-1}(U))$, $Z_1(U) = Z(U)$ と定めると $\omega(0,T') \leq \tilde{\delta}_1(f)$ のとき常に

$$\left|Z_n(X)^i_{s,t} - Z_n(U)^i_{s,t}\right| \leq 2\varepsilon K(f)\omega(s,t)^{i/p} \quad 0 \leq s \leq t \leq T', i = 1, 2. \tag{11.5}$$

$n \to \infty$ として (11.2) を得る． □

次に初期値に関する連続性を示す.

Lemma 11.2. $C_3(f)$ を適当に取ると $\omega(0,T') \le \frac{1}{1+C_3(f)}$ を満たす任意の T' について

$$\begin{aligned}\left|S_{f,\xi}(X)^i_{s,t} - S_{f,\eta}(X)^i_{s,t}\right| &\le 2\tilde{K}(f)|\xi-\eta|\omega(s,t)^{i/p}, \quad 0 \le s \le t \le T' \quad (11.6)\\ \left|\left(\xi + S_{f,\xi}(X)^i_{0,t}\right) - \left(\eta + S_{f,\eta}(X)^i_{0,t}\right)\right| &\le |\xi-\eta|(1+C_3(f)) \quad 0 \le t \le T'. \quad (11.7)\end{aligned}$$

Proof.

$$C = 2K(f), \quad C' = 4K(f), \quad \tilde{K} = 2\tilde{K}(f)$$

とし Lemma 9.5, Lemma 9.7, Lemma 9.11 の $\delta_1, \delta_2, \delta_4$ を取り $\tilde{\delta}(f) = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_4)$ と定める．$\omega(0,T') \le \tilde{\delta}_2(f)$ となるように T' を取る．Lemma 9.11 の $Z(X)$, $W(X)$ を

$$Z(X) = W(X) = \hat{X}$$

と定める．また

$$Z_n(X) = I_{\hat{f}\xi}(Z_{n-1}(X)), \quad W_n(X) = I_{\hat{f}\eta}(W_{n-1}(X))$$

と定める．ただし $Z_0(X) = W_0(X) = \hat{X}$. 繰り返し Lemma を適用し

$$\left|Z_n(X)^i_{s,t} - W_n(X)^i_{s,t}\right| \le 2\tilde{K}(f)|\xi-\eta|\omega(s,t)^{i/p}. \quad (11.8)$$

$n \to \infty$ とし (11.6) が証明された．(11.7) は (11.6) の評価から得られる． □

11.2 全区間での連続性定理

前節の評価を用いて全区間での連続性定理を示す．この証明は $1 \le p < 2$ の場合の Young 積分で定義される微分方程式の場合と同様である．

まず

$$\tilde{\delta}_3(f) = \min\left(\tilde{\delta}_1(f), \tilde{\delta}_2(f)\right)$$

と定める．時間列 $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_{N-1} < T_N = T$ を

$$\omega(T_{k-1}, T_k) = \tilde{\delta}_3(f) \quad 1 \le k \le N-1, \quad \omega(T_{N-1}, T) \le \tilde{\delta}_3(f) \quad (11.9)$$

となるように取る．

$$N \le \frac{\omega(0,T)}{\tilde{\delta}_3(f)} + 1 \quad (11.10)$$

と評価される．

$$\left\{\left(\theta_{T_{k-1}}X\right)_{s,t}\right\}_{0\le s\le t\le T_k - T_{k-1}} \qquad \left\{\left(\theta_{T_{k-1}}U\right)_{s,t}\right\}_{0\le s\le t\le T_k - T_{k-1}}, \quad 1 \le k \le N \quad (11.11)$$

の rough path いずれかをつないで得られる rough path 全体を $\Omega_T(X,U)$ と書く．$\Omega_T(X,U)$ の個数は 2^N 個ある．ここでは簡単のため $Z \in \Omega_T(X,U)$ に対して

$$Y^1(\xi, Z)_{s,t} = \pi_F(S_{f,\xi}(Z)_{s,t}) \text{ の 1st level path} \quad (11.12)$$

と書くことにする．

$$a_k \quad = \quad \max\Big\{\big|Y^1(\xi,Z)_{0,T_k} - Y^1(\xi,Z')_{0,T_k}\big| \ \Big| \ Z,Z'\in\Omega_T(X,U)\Big\} \tag{11.13}$$

と定める．解の定義から

$$Y^1(\xi,Z)_{0,T_k} = Y^1(\xi,Z)_{0,T_{k-1}} + Y^1\left(Y^1(\xi,Z)_{0,T_{k-1}},(\theta_{T_{k-1}}Z)\right)_{0,T_k-T_{k-1}} \tag{11.14}$$

である．Theorem 2.16 の a_k の評価と同様にして

$$a_{k+1} \quad \leq \quad a_k(1+C_3(f)) + \varepsilon\tilde{C}_3(f) \quad 0\leq k\leq N-1. \tag{11.15}$$

従って

$$a_{k+1} \leq (k+1)\varepsilon\tilde{C}_3(f)\exp\left(kC_3(f)\right). \tag{11.16}$$

特に

Lemma 11.3.

$$\left|Y^1(\xi,X)_{0,T_k} - Y^1(\xi,U)_{0,T_k}\right| \leq k\varepsilon\tilde{C}_3(f)\exp\left((k-1)C_3(f)\right). \tag{11.17}$$

Theorem 8.5 の証明. $T_k\leq s\leq t\leq T_{k+1}$ とする．

$$S_{f,\xi}(X)_{s,t} = S_{f,\xi+Y^1(\xi,X)_{0,T_k}}(\theta_{T_k}X)_{s-T_k,t-T_k}. \tag{11.18}$$

$$|(\theta_{T_k}X)^i_{\sigma,\tau}| \leq \omega(T_k+\sigma,T_k+\tau)^{i/p}$$

に注意する．従って

$$\begin{aligned}
&\left|S_{f,\xi}(X)^i_{s,t} - S_{f,\xi}(U)^i_{s,t}\right| \\
&\quad = \left|S_{f,\xi+Y^1(\xi,X)_{0,T_k}}(\theta_{T_k}X)_{s-T_k,t-T_k} - S_{f,\xi+Y^1(\xi,U)_{0,T_k}}(\theta_{T_k}X)_{s-T_k,t-T_k}\right| \\
&\qquad + \left|S_{f,\xi+Y^1(\xi,U)_{0,T_k}}(\theta_{T_k}X)_{s-T_k,t-T_k} - S_{f,\xi+Y^1(\xi,U)_{0,T_k}}(\theta_{T_k}U)_{s-T_k,t-T_k}\right| \\
&\quad \leq k\varepsilon\tilde{C}_3(f)\omega(s,t)^{i/p}\exp\left((k-1)C_3(f)\right) + 2\varepsilon K(f)\omega(s,t)^{i/p}.
\end{aligned} \tag{11.19}$$

$0\leq s\leq t\leq T$ の場合を考える．$T_{k-1}\leq s < T_k < \cdots < T_{l-1} < t\leq T_l$ とする．

$$t_{k-1}=s,\quad t_j=T_j\ \ (k\leq j\leq l-1),\quad t_l=t$$

と書くことにする．1st level path を評価する．Chen の関係式

$$S_{f,\xi}(X)^1_{s,t} = \sum_{j=k-1}^{l-1} S_{f,\xi}(X)^1_{t_j,t_{j+1}}$$

から

$$\begin{aligned}
\left|S_{f,\xi}(X)^1_{s,t} - S_{f,\xi}(U)^1_{s,t}\right| \quad &\leq \quad 2\varepsilon N^2\exp\left((N-1)C_3(f)\right)\left(\tilde{C}_3(f)+K(f)\right)\omega(s,t)^{1/p} \\
&\leq \quad 2\varepsilon C_3(f)\exp\left(C_3(f)\omega(0,T)\right)\omega(s,t)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{11.20}$$

2nd level path を評価する．Chen の関係式から

$$S_{f,\xi}(X)^2_{s,t} = \sum_{j=k-1}^{l-1} S_{f,\xi}(X)^2_{t_j,t_{j+1}} + \sum_{k\le m<j\le l} S_{f,\xi}(X)^1_{t_{m-1},t_m} \otimes S_{f,\xi}(X)^1_{t_j,t_{j+1}}. \quad (11.21)$$

ω の super-additivity を用い

$$\begin{aligned}
&\left|S_{f,\xi}(X)^2_{s,t} - S_{f,\xi}(U)^2_{s,t}\right| \\
&\quad \le 2(l-k+1)(l-1)(\tilde{C}_3(f)+K(f))\exp\left((N-1)C_3(f)\right)\varepsilon\omega(s,t)^{2/p} \\
&\qquad +\varepsilon C_3(f)\exp\left(\tilde{C}_3(f)\omega(0,T)\right)\frac{N(N-1)}{2}\omega(s,t)^{2/p}. \\
&\quad \le \varepsilon(1+C_3(f))\omega(0,T)\exp\left(C_3(f)\omega(0,T)\right)\omega(s,t)^{2/p}. \qquad (11.22)
\end{aligned}$$

□

12 確率微分方程式

$\sigma \in C^3_b(F, L(E,F))$, $b \in C^3_b(F,F)$ とする．$Y(t,\xi,w)$ を Stratonovich SDE

$$dY(t,\xi,w) = \sigma(Y(t,\xi,w)) \circ dw_t + b(Y(t,\xi,w))dt, \quad Y(0,\xi,w) = \xi. \quad (12.1)$$

の解とする．このように確率微分方程式はブラウン運動だけではなく drift term もある．それも考慮するため Brown 運動 $w_t = (w^1_t, \ldots, w^d_t)$ に対して

$$x_t = (w^1_t, \ldots, w^d_t, t)$$

とおく．Dyadic polygonal approximation $x(n)$ に対応する smooth rough path $\overline{x(n)}$ が $\cap_{p>2} G\Omega_p(E\times\mathbb{R})$ で収束する x 全体を $\tilde{\Theta}$ とおく．$x \in \tilde{\Theta}$ から定まる canonical rough path

$$\bar{x}_{s,t} = (1, \bar{x}^1_{s,t}, \bar{x}^2_{s,t})$$

を考えよう．

$$f = (\sigma, b) \in C^3_b(F, L(E\times\mathbb{R}, F))$$

とおく．RDE

$$dY_t = f(Y_t)d\bar{x}_t, \quad Y_0 = \xi \quad (12.2)$$

の解 $S_{f,\xi}(\bar{x})$ の F 成分は (12.1) の解の version を与える．これを見るため w の dyadic polygonal approximation を $w(n)$ とし $Y(t,\xi,w(n))$ を ODE

$$\frac{d}{dt}Y(t,\xi,w(n)) = \sigma\left(Y(t,\xi,w(n))\right)\frac{d}{dt}w(n)_t + b(Y(t,\xi,w(n))), \quad Y(0,\xi,w(n)) = \xi \quad (12.3)$$

の解とする．次の近似定理が成立する ([14])．

Theorem 12.1. 任意の $p \geq 1$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[\sup_{0\leq t\leq T} |Y(t,\xi,w(n)) - Y(t,\xi,w)|^p] = 0. \tag{12.4}$$

従って RDE の解の連続性定理から

$$Y(t,\xi,w) = \xi + \pi_F(S_{f,\xi}(\bar{x}))^1_{0,t} \qquad a.s.w.$$

となる.

13 補足

13.1 Other approaches

Gubinelli [12] による違ったアプローチがある.Hairer [13] の研究ではこの定式化による積分が用いられている. integrand が Lyons のものより一般的になっている利点があるようだ.

Davie [5] による Euler scheme による解の近似による RDE へのアプローチもある.

13.2 SDE の解が Wiener 汎関数として不連続なこと

平面曲線 $x_t = (x^1_t, x^2_t)$ に対して

$$A_{s,t}(x) = \frac{1}{2}\left(\int_s^t \left(x^1_u - x^1_s\right) dx^2_u - \int_s^t \left(x^2_u - x^2_s\right) dx^1_u\right)$$

とおく. これは線分 $\overline{x_s x_t}$ と曲線 $u \in [s,t] \to x_u$ で囲まれる図形の符号付き面積である. x_t が 2 次元ブラウン運動 w_t の時積分を確率積分と解釈してこの量を Lévy の stochastic area(確率面積) と言う. 確率微分方程式の解は $A_{s,t}(w)$ と w_t のそれぞれ $p/2$-variation norm, p-variation norm($2/p$-Hölder norm, $1/p$-Hölder norm でもよいが) の位相で連続な汎関数となるというのが連続性定理の帰結である. ただし $2 < p < 3$. この連続性により, 特別な工夫が必要だった SDE の解に対する Freidlin-Wentzell 型の large deviation や support theorem の証明がある意味で標準的な方法で証明できることになる.

Wiener measure を載せるには一様収束のノルム p-variation norm, Hölder 連続のノルムなど色々なノルムがある. また H を Cameron-Martin subspace とすると

$$h(\in H) \to A(h)$$

は連続である. したがって Wiener 測度が載るバナッハ空間のノルムを Hölder 連続よりずっと強いものにすれば汎関数

$$w \to A_{s,t}(w)$$

が連続にできるのではないかと思う人もいるかもしれないがこれは不可能であることが知られている ([29]). このことにより SDE の解は Brown 運動の汎関数として一般には不連続である. しかし SDE

$$dY(t,\xi,w) = \sigma(Y(t,\xi,w)) \circ dw_t$$

で d 個のベクトル場 $(e_i = {}^t(0,\dots,\overset{i}{1},\dots,0),\ 1 \le i \le d)$

$$V_i(x) = \sigma(x)e_i$$

が可換の時は $w \to Y(t,\xi,w)$ は連続である．これは

$$Y(t,\xi,w) = \exp(w_t^1 V_1) \circ \cdots \circ \exp\left(w_t^d V_d\right)(\xi)$$

のようにベクトル場 V_i による指数写像 $\exp(tV_i)$ の合成で書けるからである ([6]).

13.3 Fractional Brownian motion

Fractional Brownian motion の定義とその性質を説明する．平均 0 の 1 次元ガウス過程 (w_t) が Hurst parameter H をもつ fractional Brownian motion(fBm) とは

$$E[w_t w_s] = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

のときに言う．d-次元の fractional Brownian motion とは同じ Hurst parameter の独立な fbm を並べたもの

$$w_t = (w_t^1, \dots, w_t^d)$$

である.

Proposition 13.1. (w_t) が *Hurst parameter* H の *fBm* のとき
(1) $d=1$ のとき $E[|w_t - w_s|^m] = C_p|t-s|^{Hm} \quad t,s \ge 0, m > 0.$
(2) $H = 1/2$ のとき (w_t) は標準ブラウン運動.
(3) (w_t) のパスは $H - \varepsilon$, $(\forall\varepsilon > 0)$ の *Hölder* 連続性を持つ.
(4) (w_t) のパスは $\frac{1}{H} + \delta$*-variation* 有限 $(\forall\delta > 0)$.
(5) $H \ne 1/2$ ならば w_t は *semi-martingale* ではない.

$H > 1/2$ のときは fBm のパスは Brown 運動より正則性が高く Young integral として積分が意味を持つ．また, すでに述べたように $1/4 < H < 1/2$ のときは fBm は canonical に geometric rough path に lift できる．Canonical な lift ではないが最近の結果については [26], [31] を参照せよ．また,

より一般に p 次変分有限 $(\forall p \ge 1)$ なパスは geometric q-rough path $(q > p)$ に lift できることが知られている [23]. 問題はどれが自然なチョイスかという事である.

またこの rough path に対する RDE の解は積分を Stratonovich 積分と解釈しても解になっていることが示されている ([3])．ここで言う Stratonovich 積分については [25] を参照せよ.

13.4 Control function

Lemma 13.2. $\psi : \Delta_T \to V$ を連続写像で

$$\|\psi\|_p < \infty$$

とする．ただし $p > 0$. $\omega(s,t) = \|\psi\|_{p,[s,t]}^p$ と定義すると *control function* である．また $\psi(t,t) = 0$ $(0 \le \forall t \le T)$.

Proof. まずωがsuper-additivityをみたすのは定義から自明. $\psi(t,t)=0$を示す. $\psi(t_0,t_0)=v\neq 0$としよう. ψの連続性からある$\varepsilon>0$が存在して

$$|\psi(s,t)|\geq\frac{1}{2}|v|\qquad t_0-\varepsilon\leq s,t\leq t_0+\varepsilon.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\|\psi\|_p\geq\|\psi\|_{p,[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]}^p &\geq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\psi\left(t_0-\varepsilon+\frac{2k\varepsilon}{n},t_0-\varepsilon+\frac{2(k+1)\varepsilon}{n}\right)\right|^p\\ &\geq (n-1)\left(\frac{|v|}{2}\right)^p\to\infty \end{aligned}\tag{13.1}$$

となり矛盾. したがって$\psi(t,t)=0$. tをfixして次を示す. $\omega(s,t)$の変数sについても同じ主張が成立することが同様に示せるので, これで$\omega(s,t)$の連続性がわかる.

(i) 任意の$\varepsilon>0$に対して$\delta>0$が存在して

$$\sup\left\{\omega(s,t')-\omega(s,t)\mid s<t<t'<t+\delta\right\}\leq\varepsilon$$

(ii) 任意の$\varepsilon>0$に対して$\delta>0$が存在して

$$\sup\left\{\omega(s,t)-\omega(s,t')\mid 0<s<t-\delta<t'<t\right\}\leq\varepsilon$$

(i)を示す. 仮に

$$s_n<t<t_n,\quad t_n\downarrow t,\quad \omega(s_n,t)+\varepsilon<\omega(s_n,t_n)\tag{13.2}$$

とする. δを十分小さくして$\sup_{s,|u-v|\leq\delta}||\psi(s,u))|^p-|\psi(s,v)|^p|\leq\varepsilon/2$となるように取る. $|t_n-t|\leq\delta$とする. $[s_n,t_n]$の分割$s_n=\sigma_0<\sigma_1<\cdots<\sigma_N=t_n$で

$$\sum_{k=1}^{N}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p\geq\omega(s_n,t)+\varepsilon$$

となるものを取る. このとき$\sigma_{N-1}>t$である. なぜなら$\sigma_{N-1}\leq t$ならば

$$\begin{aligned}\omega(s_n,t)+\frac{\varepsilon}{2} &\geq \sum_{k=1}^{N-1}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p+|\psi(\sigma_{N-1},t)|^p+|\psi(\sigma_{N-1},t_n)|^p-|\psi(\sigma_{N-1},t)|^p\\ &= \sum_{k=1}^{N}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p\\ &\geq \omega(s_n,t)+\varepsilon\end{aligned}\tag{13.3}$$

となり矛盾するから. そこで

$$\sigma_{M-1}\leq t<\sigma_M<\cdots<\sigma_{N-1}<\sigma_N=t_n$$

のように M を取る．

$$\begin{aligned}\omega(s_n,t)+\sum_{k=M+1}^{N}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p &\geq \sum_{k=1}^{M-1}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p+|\psi(\sigma_{M-1},t)|^p+\sum_{k=M+1}^{N}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p \\ &\geq \omega(s_n,t)+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{13.4}$$

従って

$$\omega(\sigma_M,t_n)\geq\frac{\varepsilon}{2}.$$

この M を M_0, t_n を t_{n_0} と書く．次に $t_{n_1}<\sigma_M$ となる t_{n_1} を取り同様にして σ_{M_1} を定める．この操作は無限に繰り返すことができて

$$t<\cdots<\sigma_{M_k}<t_{n_k}<\sigma_{M_{k-1}}<t_{n_{k-1}}<\cdots<\sigma_{M_0}<t_{n_0}$$

かつ

$$\omega(\sigma_{M_k},t_{n_k})\geq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Super-additivity を用いて $\omega(t,t_{n_0})=+\infty$ となり矛盾する．ゆえに (i) が示された．(ii) も同様に示すことができる．仮りに

$$s_n<t_n,\qquad t_n\uparrow t,\qquad \omega(s_n,t_n)+\varepsilon<\omega(s_n,t) \tag{13.5}$$

とする．ここに δ を十分小さくして

$$\sup_{s,|u-v|\leq\delta}||\psi(s,u)|^p-|\psi(s,v)|^p|\leq\frac{\varepsilon}{2}\qquad \sup_{t-\delta\leq u\leq t}|\psi(u,t)|^p\leq\frac{\varepsilon}{4}, \tag{13.6}$$

となるようにする．n を十分大きくし $|t-t_n|\leq\delta$ とする．$[s_n,t]$ の分割 $s_n=\sigma_0<\cdots<\sigma_N=t$ で

$$\sum_{k=1}^{N}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p\geq\omega(s_n,t_n)+\varepsilon \tag{13.7}$$

となるものを取る．すると $\sigma_{N-1}>t_n$ である．なぜなら $\sigma_{N-1}\leq t_n$ ならば

$$\begin{aligned}\omega(s_n,t_n)+\frac{\varepsilon}{2} &\geq \sum_{k=1}^{N-1}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p+|\psi(\sigma_{N-1},t_n)|^p+|\psi(\sigma_{N-1},t)|^p-|\psi(\sigma_{N-1},t_n)|^p \\ &\geq \omega(s_n,t_n)+\varepsilon \end{aligned} \tag{13.8}$$

となり矛盾するからである．前と同じように

$$s_n=\sigma_0<\cdots<\sigma_{M-1}\leq t_n<\sigma_M<\cdots<\sigma_{N-1}<\sigma_N=t$$

と M を定める.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p &= \sum_{k=1}^{M-1}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p+|\psi(\sigma_{M-1},t_n)|^p\\ &\quad +|\psi(\sigma_{M-1},\sigma_M)|^p-|\psi(\sigma_{M-1},t_n)|^p\\ &\quad +\sum_{k=M+1}^{N-1}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p+|\psi(\sigma_{N-1},t)|^p\\ &\le \omega(s_n,t_n)+\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{k=M+1}^{N-1}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p+\frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \tag{13.9}$$

ゆえに

$$\sum_{k=M+1}^{N-1}|\psi(\sigma_{k-1},\sigma_k)|^p \ge \frac{1}{4}\varepsilon. \tag{13.10}$$

したがって $t_{n_1} > \sigma_{N-1}$ となる t_{n_1} について同じ議論を繰り返していくと $\omega(t_n, t) = +\infty$ となり矛盾. □

参考文献

[1] F. Baudoin, An introduction to the geometry of stochastic flows, Imperial college press, London, 2004.

[2] F. Baudoin and M. Hairer, A version of Hörmander's theorem for the fractional Brownian motion, Probab. Theory Related Fields 139 (2007), no. 3-4, 373–395

[3] L. Coutin, P. Friz and N. Victoir, Good rough path sequences and applications to anticipating stochastic calculus, Ann. Probab. 35 (2007), no. 3, 1172–1193.

[4] L. Coutin and Z. Qian, Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions, Probab. Theory Related Fields **122** (2002), no. 1, 108–140.

[5] A.M. Davie, Differential equations driven by rough paths: an approach via discrete approximation. Appl. Math. Res. Express. AMRX 2007, no. 2, Art. ID abm009, 40 pp

[6] H. Doss, Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires, Ann. Inst. H. Poincaré, **13** (1977), 99–125.

[7] D. Feyel and A. de La Pradelle, Curvilinear integrals along enriched paths, Electron. J. Probab. 11 (2006), no. 34, 860–892 (electronic).

[8] P. Friz, Continuity of the Itô-Map for Hölder rough paths with applications to the support theorem in Hölder norm, Probability and partial differential equations in modern applied mathematics, 117–135, IMA Vol. Math. Anal., **140**, Springer, New York, 2005.

[9] P. Friz and N. Victoir, Approximations of the Brownian rough path with applications to stochastic analysis, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **41** (2005), no. 4, 703–724.

[10] P. Friz and N. Victoir, A note on the notion of geometric rough paths, Probab. Theory relat. fields **136**, 395–416, 2006.

[11] P. Friz and N. Victoir, Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications, to appear in Cambridge Studies of Advanced Mathematics, Cambridge University Press.

[12] M. Gubinelli, Controlling rough paths. J. Funct. Anal. 216 (2004), no. 1, 86140.

[13] M. Hairer, Rough Stochastic PDEs, in arXiv.

[14] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes, Second edition, North-Holland Mathematical Library, **24** North-Holland Publishing Co., 1989

[15] N.C. Jain and D. Monrad, Gaussian measures in B_p, Annals of Probability, 1983, Vol. 11, No. 1, 46–57.

[16] M. Ledoux, T. Lyons and Z. Qian, Lévy area of Wiener processes in Banach spaces, Annals of Probability, **30.** (2002), No.2, 546–578.

[17] M. Ledoux, Z. Qian and T. Zhang, Large deviations and support theorem for diffusions via rough paths, Stochastic processes and their applications, **102** (2002), No.2, 265–283.

[18] A. Lejay, An Introduction to Rough Paths, Séminaire de probabilités XXXVII, Lecture Notes in Mathematics (Springer-Verlag), (2003).

[19] A. Lejay, On rough differential equations. Electron. J. Probab. 14 (2009), no. 12, 341364.

[20] T. Lyons, Differential equations driven by rough signals, Rev.Mat.Iberoamer., **14** (1998), 215–310.

[21] T. Lyons and Z. Qian, System control and rough paths, (2002), Oxford Mathematical Monographs.

[22] T. Lyons, M. Caruana and T. Lévy, Differential equations driven by rough paths, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXIV-2004, Lecture Notes in Math., 1908, Springer, 2007.

[23] T. Lyons and N. Victoir, An extension theorem to rough paths, Ann. Inst. H. Poincaré Anal.Non Linéare **24** 2007, no. 5, 835–847.

[24] Millet, A and Sanz-Solé, M, Large deviations for rough paths of the fractional Brownian motion, Ann.Inst.H.Poincaré, Probab.Statist. 42 (2006), no.2

[25] D. Nualart, The Malliavin Calculus and Related Topics, Second edition. Probability and its applications, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[26] D. Nualart and S. Tindel, A construction of the rough path above fractional Brownian motion using Volterra's representation, arXiv, 2009.

[27] S. Ogawa, The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals. Japan J. Appl. Math. 2 (1985), no. 1, 229240.

[28] F. Russo and P. Vallois, Forward, backward and symmetric stochastic integration. Probab. Theory Related Fields 97 (1993), no. 3, 403421

[29] H. Sugita, Hu-Meyer's multiple Stratonovich integral and essential continuity of multiple Wiener integral, Bull.Sci.Math. **113** (1989), no. 4, 463–474.

[30] S.J. Taylor, Exact asymptotic estimates of Brownian path variation, Duke Math. J. **39** (1972), 219–241.

[31] J. Unterberger, A stochastic calculus for multidimensional fractional fractional Brownian motion with arbitrary Hurst index. Arxiv, preprint, 2009.

[32] S. Watanabe, RIMS Kokyuroku 1032, 3rd Workshop on Stochastic Numerics, 1998.

[33] E. Wong and M. Zakai, On the relation between ordinary and stochastic differential equations, Internat. J. Engrg. Sci., **3**, (1965), 213–229.

[34] L.C. Young, An inequality of Hölder type, connected with Stieltjes integration, Acta Math., **67**, 251–282, 1936.