数学講究 XB レポート問題 (会田担当分)

以下の中から 2 問を選んで解け．ただし, 以下で現れる測度はルベーグ測度に絶対連続で密度関数は滑らかな正値関数とする．また, $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ で $\mathbb{R}^n$ 上の C^k 級関数のうち関数自身とその関数の k 階までの導関数がすべて有界関数である物全体を表す.

1. $\mathbb{R}^n$ 上の確率測度 μ に対して次の対数ソボレフ不等式が成立するとする.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 \log\left(f(x)^2\right) d\mu(x) \le \quad \alpha \int_{\mathbb{R}^n} |Df(x)|^2 d\mu(x) + \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu)} \log(\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu)}) \qquad f \in C_b^1(\mathbb{R}^n).$$

ただし, $\alpha > 0, Df(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$, $|Df(x)| = \left\{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^2\right\}^{1/2}$. このとき, $1+\varepsilon g$ (ε は十分小さい正数) をこの不等式に代入して, $\varepsilon \to 0$ とすることにより $g \in C_b^1$ に対して次のポアンカレ不等式が成立することを示せ.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(g(x) - \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu(x)\right)^2 d\mu(x) \le \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |Dg(x)|^2 d\mu(x).$$

2. μ_i $(i = 1, 2, \dots)$ を $\mathbb{R}$ 上の有限測度とする．$\alpha_i > 0$ が存在し対数ソボレフ不等式

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \log(f(x)^2) d\mu_i(x) \le \alpha_i \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 d\mu_i(x) + \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mu_i)} \log(\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mu_i)}) \qquad f \in C_b^1(\mathbb{R})$$

が成立するとする．直積測度 $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ に対して, 対数ソボレフ不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z)^2 \log\left(f(z)^2\right) d\mu(z) \le \alpha \int_{\mathbb{R}^n} |Df(z)|^2 d\mu(z) + \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu)} \log(\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\mu)}) \quad f \in C_b^1(\mathbb{R}^n) \quad (*)$$

が成立することを次に従って示せ．ただし, $\alpha = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. $Df(z)$ の定義は問題 1 と同じである．また, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ と表すことにし, $\mu^{(n)}(dx) = (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(dx)$ $\mu^{(m)}(dy) = (\mu_{n+1} \otimes \cdots \otimes \mu_{n+m})(dy)$ をそれぞれ, $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ 上の直積測度とする.

   (a) $\mathbb{R}^{n+m}$ 上の C_b^1 関数 $f(z)$ $(z = (x, y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m)$ に対し, $\varphi(y) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)^2 d\mu^{(n)}(x)}$ とおく．ただし, すべての (x, y) について $f(x, y) > 0$ を仮定する.

$$\int_{\mathbb{R}^m} |(D\varphi)(y)|^2 d\mu^{(m)}(y) \le \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |(D_y f)(z)|^2 d\mu(z)$$

   を示せ．ただし, $D_y f$ は y に関する偏微分 $D_y f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_m}\right)$ である.

   (b) 帰納法を用いて, $(*)$ を示せ.

3. $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ を $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ を満たす独立確率変数とし, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ とおく．任意の有界連続関数 f について $\lim_{n\to\infty} E\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$ となることが知られている．$f \in C_b^1(\mathbb{R})$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 E\left[f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n-1}} + \frac{2t-1}{\sqrt{n}}\right)\right] dt = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

   となることを示せ.

4. 講義の中で紹介した $\mathcal{C}_n$ 上の離散対数ソボレフ不等式の $n = 1$ の場合を証明せよ．さらに $\mathcal{C}_n$ 上の不等式で等号成立の条件は関数が定数関数であることを示せ.

参考文献

[1] D. Bakry, I. Gentil and M. Ledoux, Analysis and geometry of Markov diffusion operators. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 348. Springer, Cham, 2014.

[2] S. Boucheron, G. Lugosi, P. Massart, Concentration inequalities. A nonasymptotic theory of independence. With a foreword by Michel Ledoux. Oxford University Press, Oxford, 2013.

[3] E.B. Davies, Heat kernels and spectral theory. Cambridge Tracts in Mathematics, 92. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[4] J-D. Deuschel and D.W. Stroock, Large deviations. Pure and Applied Mathematics, 137. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989.

[5] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities. Amer. J. Math. 97 (1975), no. 4, 1061–1083.

[6] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities—a survey. Vector space measures and applications (Proc. Conf., Univ. Dublin, Dublin, 1977), I, pp. 196–203, Lecture Notes in Math., 644, Springer, Berlin-New York, 1978.

[7] G. Royer, An initiation to logarithmic Sobolev inequalities. Translated from the 1999 French original by Donald Babbitt. SMF/AMS Texts and Monographs, 14. American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris, 2007.

[8] L. Saloff-Coste, Aspects of Sobolev-type inequalities. London Mathematical Society Lecture Note Series, 289. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.