1　区間推定

以下の推定について説明する。

(1) **正規母集団の母平均の推定 (母分散が既知の場合)**

(2) **正規母集団の母平均の推定 (母分散が未知の場合)**

(3) **母比率の推定**

(1) **正規母集団の母平均の推定 (母分散が既知の場合)**
次の教科書に載っている例題を考えよう.

例題 1. あるメーカーの自動車のガソリン 1 リットルあたりの走行距離は標準偏差 $\sigma = 0.50\mathrm{km}$ の正規分布にしたがうという. 10 台をランダムに選んで 1 リットルあたりの走行距離を調べたところ、次の結果を得た：

17.5, 18.0, 18.3, 17.7, 18.5, 18.0, 18.6, 17.2, 18.7, 18.2 (単位 km)

母平均に対する**信頼度** 95 %、99 %の**信頼区間**を求めよ.

解　標本調査の結果標本平均 $\bar{x}_{10}$ は

$$\bar{x}_{10} = \frac{17.5 + 18.0 + 18.3 + 17.7 + 18.5 + 18.0 + 18.6 + 17.2 + 18.7 + 18.2}{10} = 18.07 \fallingdotseq 18.1$$

である. 自動車の 1 リットルあたりの走行距離の母平均を m とする. X_n を平均 m, 標準偏差 0.50 の正規分布に従う独立確率変数とし $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ と定める.

$$\frac{\bar{X}_{10} - m}{0.5}\sqrt{10}$$

は標準正規分布に従う. 標準正規分布にしたがう確率変数 T について

$$P(|T| \leq 1.96) = 0.95, \qquad P(|T| \leq 2.58) = 0.99$$

だから

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}_{10} - m}{0.5}\sqrt{10}\right| \leq 1.96\right) = 0.95.$$

$\left|\dfrac{\bar{X}_{10} - m}{0.5}\sqrt{10}\right| \leq 1.96$ は

$$\bar{X}_{10} - \frac{0.5}{\sqrt{10}} \times 1.96 \leq m \leq \bar{X}_{10} + \frac{0.5}{\sqrt{10}} \times 1.96$$

と同値である．$\bar{X}_{10}$ を標本調査の結果の標本平均 $\bar{x}_{10}$ に置き換えた区間

$$\left[\bar{x}_{10} - \frac{0.5}{\sqrt{10}} \times 1.96, \quad \bar{x}_{10} + \frac{0.5}{\sqrt{10}} \times 1.96\right]$$

が信頼度 95 %の信頼区間である．具体的には

$$\left[18.1 - \frac{0.5}{\sqrt{10}} \times 1.96, 18.1 + \frac{0.5}{\sqrt{10}} \times 1.96\right] \fallingdotseq [17.8, 18.4] .$$

$\square$

注意 1.1. (1) 信頼度 99 %の信頼区間は

$$\left[18.1 - \frac{0.5}{\sqrt{10}} \times 2.58, 18.1 + \frac{0.5}{\sqrt{10}} \times 2.58\right]$$

となる. 信頼度をあげると区間の幅が広くなることに注意．また、信頼区間は標本調査の結果にに依存することも注意すること.

(2) T を標準正規分布に従う確率変数とする．$0 < \alpha \leq 1$ に対して

$$P\left(|T| \geq z(\alpha)\right) = \alpha$$

となる $z(\alpha)$ を標準正規分布の**両側 100α %点**という．例えば

$$\text{両側 } 5\,\%\text{点} \quad z(0.05) = 1.96, \qquad \text{両側 } 1\,\%\text{点} \quad z(0.01) = 2.58$$

である.

一般に母分布が $N(m, \sigma^2)$ の正規母集団から無作為抽出した標本 $X_1, \ldots, X_n$ の正規化

$$T_n = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n}$$

は $N(0, 1)$ に従うから

$$P\left(-z(\alpha) \leq \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n} \leq z(\alpha)\right) = 1 - \alpha.$$

従って

$$\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z(\alpha) \leq m \leq \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z(\alpha)$$

となる確率が $1 - \alpha$.

n 個の標本調査を行った結果、標本平均 $\bar{x}_n$ を得た時, m が区間

$$\left[\bar{x}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z(\alpha),\ \bar{x}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z(\alpha)\right] \qquad (\star 1)$$

に入るのは α が小さいなら非常に確からしいであろう．したがって標本を用いて定まる上記の $(\star 1)$ を**信頼度** $100(1 - \alpha)$ **%の信頼区間**というのである.

(2) 正規母集団の母平均の推定 (母分散が未知の場合)
次の問題を考えよう．

例題 2. 工場に新しい機械を入れてボルトを作った。製品の中から 20 個を選んでその長さを測ったところ平均が 2.52cm, 標本標準偏差が 0.11 であったという．ボルトの長さは正規分布に従うとして、母平均の信頼度 95 %、99 %の信頼区間を求めよ．

解 この問題では新しい機械を使っているため、過去に蓄積された情報が無いため, 母分散は未知である．ボルトの長さが正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとする．Gosset の定理 (定理 **??**) によれば $X_1, \ldots, X_n$ を $N(m, \sigma^2)$ に従う独立確率変数とすると

$$\hat{T}_n = \frac{\bar{X}_n - m}{s_n} \times \sqrt{n-1}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布に従う．ただし $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ は標本平均, $s_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}$ は標本標準偏差である．本問題では $n = 20$ の場合にあたる．自由度 19 の t 分布について教科書巻末の t **分布表** (141 ページ) によれば

$$P(|t| \leq 2.09) = 0.95, \qquad P(|t| \leq 2.86) = 0.99.$$

すなわち

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}_{20} - m}{s_{20}}\sqrt{19}\right| \leq 2.09\right) = 0.95.$$

したがって

$$\bar{X}_{20} - \frac{s_{20}}{\sqrt{19}} \times 2.09 \leq m \leq \bar{X}_{20} + \frac{s_{20}}{\sqrt{19}} \times 2.09$$

となる確率は 0.95 である．ここで、$\bar{X}_{20}, s_{20}$ を標本調査の結果の $\bar{x}_{20} = 2.52, \bar{s}_{20} = 0.11$ に変えて得られる区間

$$\left[2.52 - \frac{0.11}{\sqrt{19}} \times 2.09,\ 2.52 + \frac{0.11}{\sqrt{19}} \times 2.09\right] \fallingdotseq [2.45, 2.57].$$

が信頼度 95 %の信頼区間である． □

注意 1.2. (1) 分散 σ^2 がわからなくても、n が十分大きければ中心極限定理と大数の法則により、確率変数

$$\frac{\bar{X}_n - m}{s_n}\sqrt{n-1}$$

の分布は標準正規分布で近似できるので、t 分布を使う必要は無い．しかし、$n = 20$ は大きくないため、t 分布を使う必要があるのである。

(2) t を自由度 n の t 分布にしたがう確率変数とする．$0 < \alpha < 1$ に対して

$$P(|t| \geq t_n(\alpha)) = \alpha$$

となる $t_n(\alpha)$ を自由度 n の t 分布の**両側 100α %点**という．例えば $n=19$(本問題の場合) のとき

$$\text{両側}\,5\,\%\text{点}\quad t_{19}(0.05)=2.09, \qquad \text{両側}\,1\,\%\text{点}\quad t_{19}(0.01)=2.86$$

である．一般に母分布が $N(m,\sigma^2)$ の正規母集団から無作為抽出した標本 $X_1,\dots,X_n$ について

$$\hat{T}_n=\frac{\bar{X}_n-m}{s_n}\sqrt{n-1}$$

は自由度 $n-1$ の t 分布に従うから

$$P\left(-t_{n-1}(\alpha)\le\frac{\bar{X}_n-m}{s_n}\sqrt{n-1}\le t_{n-1}(\alpha)\right)=1-\alpha.$$

従って

$$\bar{X}_n-\frac{s_n}{\sqrt{n-1}}t_{n-1}(\alpha)\le m\le\bar{X}_n+\frac{s_n}{\sqrt{n-1}}t_{n-1}(\alpha)$$

となる確率が $1-\alpha$.

したがって α が小さい時, n 個の標本調査を行った結果、標本平均 $\bar{x}_n$, 標本標準偏差 $\bar{s}_n$ を得た時, m が区間

$$\left[\bar{x}_n-\frac{\bar{s}_n}{\sqrt{n-1}}\times t_{n-1}(\alpha),\ \bar{x}_n+\frac{\bar{s}_n}{\sqrt{n-1}}\times t_{n-1}(\alpha)\right] \qquad (\star 2)$$

に入るのは非常に確からしいであろう．したがって標本を用いて定まる上記の $(\star 2)$ を信頼度 $100(1-\alpha)$ %の信頼区間というのである．

(3) 母比率の推定

母集団の各要素がある特性 A に属すか属さないという状況で A に属すという比率 (割合)p を区間推定する問題を考える．この比率 p を母比率という．例えば

(i) ある地方の各家庭であるテレビ番組を見た比率 (視聴率調査)

(ii) 日本の有権者で民主党を支持する人の比率

などの推定である．

例題 3. ある地方であるテレビ番組を視聴したかどうか 200 人の人に調査したところ、視聴した割合は 23.5 %であった。この地方における視聴率の信頼度 95 %, 99 %の信頼区間を求めよ．

解　視聴率を p とする．

$$P(X_i=1)=p, \qquad P(X_i=0)=1-p$$

となる独立確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ の和 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ が無作為に n 人の視聴者を選んだときの視聴していた人の人数を表す確率変数である (分布は**二項分布** $B(n, p)$). $V[X_i] = p(1-p)$ だから n が大きい時、中心極限定理により

$$T_n = \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}$$

は $N(0,1)$ で近似できる. ($\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ である). $n = 200$ の場合, 標準正規分布の両側 5 %点 1.96 を用いると

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}_{200} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \times \sqrt{200}\right| \leq 1.96\right) = 0.95.$$

従って

$$\bar{X}_{200} - \frac{1.96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{200}} \leq p \leq \bar{X}_{200} + \frac{1.96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{200}}$$

となる確率は 0.95 である. ここで $\bar{X}_{200}$ を標本調査の結果の 0.235 に変えて信頼度 95 %の信頼区間を求める。。。。となりそうだが、この区間の表示には推定したい未知の p が含まれてしまっている. ここで次の二つの立場で考えよう。

(i) 信頼区間を大きく取る立場

p は確かに不明なので, 最悪の場合を考える.

$$p(1-p) = p - p^2 = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

だから $p(1-p)$ を $\frac{1}{4}$ に取っておけば十分と考えられる。そこで

$$\left[\bar{x}_{200} - \frac{1.96\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{200}}, \bar{x}_{200} + \frac{1.96\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{200}}\right]$$

を信頼度 95 %の信頼区間とする.

(ii) p を近似する値として標本調査で得られた値を用いる立場

視聴率調査の結果の $\bar{x}_{200} = 0.235$ で置き換えて

$$\left[0.235 - \frac{1.96 \times \sqrt{0.235 \times (1-0.235)}}{\sqrt{200}}, 0.235 + \frac{1.96 \times \sqrt{0.235 \times (1-0.235)}}{\sqrt{200}}\right]$$

を信頼度 95 %の信頼区間とする. □

さらに例題をあげる。

例題 4. 全国模試の数学のテストで無作為に 400 人の学生の点数を調べたところ、平均点が 65 点であった。得点の分布の標準偏差が 10 であることが知られている場合、数学の試験の点の母平均を信頼度 95 %で区間推定せよ.

ヒント： 試験の得点が正規分布に従うかこの問題では明らかではないが 400 人という標本は十分大きいとしてよいので、正規分布で近似することを考える。無作為抽出して得られる n 個の得点の確率変数を $X_1, \ldots, X_n$ とする．本問題では $n = 400$ だが十分大きいので, X_i の分布が正規分布かどうか明らかではないが正規化した

$$\frac{\bar{X}_{400} - m}{10} \times \sqrt{400}$$

は標準正規分布で近似できると考えられる。

例題 5. (1) 全国模試の数学のテストで無作為に 30 人の学生の点数を調べたところ、平均点が 65 点, 標本標準偏差が 10 であった。得点の分布は正規分布に従うとし、数学の試験の点の母平均 m を信頼度 95 %で区間推定せよ.

(2) 全国模試の数学のテストで無作為に 300 人の学生の点数を調べたところ、平均点が 65 点, 標本標準偏差が 10 であった。数学の試験の点の母平均 m を信頼度 95 %で区間推定せよ.

ヒント：無作為抽出して得られる n 個の得点の確率変数を $X_1, \ldots, X_n$ とする．標本分散を s_n^2 とする。

(1) の場合は $n = 30$ が大きくないので

$$\frac{\bar{X}_{30} - m}{s_{30}} \times \sqrt{29}$$

は自由度 29 の t 分布に従うとして計算する．(2) の場合は $n = 300$ は十分大きいので

$$\frac{\bar{X}_{300} - m}{s_{300}} \times \sqrt{300}$$

は $N(0, 1)$ に従う確率変数であるとして計算する.

例題 6. ある選挙区で一人の候補者の支持率を信頼度 95 %の信頼区間の幅が 2 %以下であるように推定するにはどの位の大きさの標本を抽出すればよいか？

ヒント: 標本の数を n とし、標本調査の結果の支持率の割合を $\bar{x}_n$ とする。$p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ を用いて信頼区間を大きく取る立場をとると信頼度 95 %の信頼区間は

$$\left[\bar{x}_n - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{n}} \times 1.96,\ \bar{x}_n + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{n}} \times 1.96\right]$$

したがって信頼区間の幅は $\frac{1.96}{\sqrt{n}}$．これが 0.02 より小さければよい.

2　仮説検定

2.1　仮説検定の考えかた

仮説検定とは、ある母集団の**母数に対する仮説**を標本調査の結果を見て、認める (**採択する**) か認めないか (**棄却する**) を判断することを言う.

例 2.1. あるテレビ番組のある週の視聴率は 30 %であるという。次の週に 300 軒の家庭で調査したところ、99 軒の家庭で視聴されていたという. 視聴率は変化したと言えるだろうか.

考え方　視聴率は 30 %のままであるという仮説 H(Hypothesis の頭文字の H, **帰無仮説**という) を考える. この仮説が正しければ標本調査の結果は母平均の $300 \times 30 = 90$ 軒からあまり離れていないはずである.

(i)　平均の 90 から 9 以上離れたデータが得られる確率が小さければ, まれな現象が起こったわけだから、仮説は間違いと推測し棄却する.

(ii)　平均の 90 から 9 以上離れたデータが得られる確率が小さくなければ、仮説に反するデータが得られたわけではないので、仮説を棄却することをしない. (仮説 H を採択する、ただし積極的に採択するというわけではない).

の方針で考える. 仮説 H の下、300 軒のうち視聴した軒数 X は $B(300, 0.3)$ の二項分布に従う. 300 個のデータは十分数が大きいので、中心極限定理により X は正規分布 $N(90, 300 \times 0.3 \times 0.7)$ に従う確率変数 $\tilde{X}$ で近似できる. 半整数の補正をして

$$
\begin{aligned}
P(|X-90| \geq 9) &\fallingdotseq P\left(|\tilde{X}-90| \geq 8.5\right) \\
&= P\left(\left|\frac{\tilde{X}-90}{\sqrt{300 \times 0.3 \times 0.7}}\right| \geq \frac{8.5}{\sqrt{300 \times 0.3 \times 0.7}}\right) \\
&= P\left(|T| \geq 1.07\right) \qquad (T \text{ は標準正規分布にしたがう確率変数}) \\
&= 1 - 0.36 \times 2 = 0.28
\end{aligned}
$$

確率 0.28 は小さいとは言えないので、仮説を棄却することは無い、ということになる. □

注意 2.2. 仮説は棄却されなかったが、この仮説が間違っている可能性はもちろんある。その場合、棄却しないという判断は誤りということになる. この間違いを**第二種の過誤**と言う. 逆に仮説が正しいのに仮説を棄却してしまうこともありえる. この間違いを**第一種の過誤**と言う.

上記の方針 (i), (ii) で確率が小さければと言ったがどのくらいの確率まで考えるかで棄却、採択が変わる．この確率を**危険率, 有意水準**という.

仮説検定の流れを述べると次のようになる：

(1) 帰無仮説 H を設定する.

(2) 帰無仮説 H の確率分布に従う独立確率変数 $X_1,...,X_n$ の統計量 $T(X_1,...,X_n)$ の分布を決定する.

(3) 有意水準 (危険率)α を設定し、

$$P(T(X_1,...,X_n) \in W_\alpha) = \alpha$$

となる危険率 α の**棄却域** W_α を求める.

(4) 実際に標本調査を行いその標本 $x_1,...,x_n$ を統計量に代入した値 $T(x_1,...,x_n)$ が W_α に属していれば仮説を棄却し、W_α に属さなければ仮説を採択することにする.

なお、教科書では 300 軒の調査で危険率 5 パーセントの標本数に対する棄却域は

$$W_{0.05} = \{n \mid 0 \leq n \leq 74 \text{ または } n \geq 106\}$$

と計算されている．この問題では視聴率が変化したかどうかを検定したので、90 軒より極端に多いか、少ないかの両方の範囲が棄却域になる．つまり**両側検定**になっている.

また、もう少し正確に言うと**帰無仮説**に対してもう一つの仮説

対立仮説 H′ : 視聴率 $\neq 30$ %

を立て、どちらを取るかを判断したことになっている.

宣伝活動を行って視聴率があがったかどうかを判定したいときもあるであろう．その場合は以下のように**片側検定**を行うことになる.

例題 7. あるテレビ番組のある週の視聴率は 30 %であった．さらに宣伝活動を行ったところ、次の週は、1000 軒で調査したところ、330 軒で視聴されていたと言う．視聴率は上がったと言えるか？危険率 5 %で検定せよ.

解 帰無仮説 H、および対立仮説 H′ は

H : 視聴率は 30 %である,

H' : 視聴率は 30 %より大きい

である．X_i を $P(X_i=1)=0.3, P(X_i=0)=0.7$ となる独立確率変数とする。$S=\sum_{i=1}^{1000} X_i$ と定める。S は二項分布 $B(1000, 0.3)$ に従う確率変数である。S の平均は 300 なので、S が 300 よりどのぐらい大きければ確率が 0.05 になるかを見ればよい．つまり

$$P(S \geq 300+a) = 0.05$$

となる a を求めることになる．S の分布は正規分布 $N(300, 1000 \times 0.3 \times 0.7)$ で近似できるので、正規分布 $N(300, 210)$ に従う確率変数 $\tilde{S}$ を考えると

$$\begin{aligned} P(S \geq 300+a) &\fallingdotseq P\left(\tilde{S} \geq 300+a-0.5\right) \qquad \text{(半整数の補正)} \\ &= P\left(\frac{\tilde{S}-300}{\sqrt{210}} \geq \frac{a-0.5}{\sqrt{210}}\right) \\ &= P\left(T \geq \frac{a-0.5}{\sqrt{210}}\right) \qquad (\star 1) \end{aligned}$$

ここで T は $N(0,1)$ に従う確率変数である．$(\star 1)$ の等号は正規分布の性質から従うものである．正規分布表より

$$P(T \geq 1.65) = 0.05$$

だから

$$\frac{a-0.5}{\sqrt{210}} = 1.65$$

を解いて $a=24.4$．従って、標本平均に対する棄却域は $[324.4, \infty)$．半整数の補正をしないと $a=23.9$ で棄却域は $[323.9, \infty)$ である．

いずれの場合でも 330 という数字は棄却域に入っているので、帰無仮説は棄却され対立仮説 H’ が採択されることになる． □

注意 2.3. (1) 危険率を 1 %とすると $P(T \geq 2.33) = 0.01$ なので $\frac{a-0.5}{\sqrt{210}} \geq 2.33$ を解いて $a \geq 34.3$．ゆえに棄却域は $[334.3, \infty)$．したがって仮説は採択され視聴率はあがったとは言えない、となる。

(2) 危険率 5 %の検定では、帰無仮説を棄却したが、この判断が誤りである可能性はある。これが**第一種の過誤**である．

仮説検定の例題を教科書からさらに二つあげる．

例題 8 (母平均の検定)**.** あるメーカーが平均 1500 時間, 標準偏差 30 の寿命をもつ蛍光灯を改良しようとした．試作品の中から 20 本選んで標本調査したところ、標本平均は 1517 時間の寿命であったという．分布は正規分布であり、標準偏差は変わらないものとし、危険率 1 パーセントで改良されたかどうか検定せよ．

解

H ：平均は 1500 である．

H' ：平均は 1500 より大きい．

の片側検定の問題である．$N(1500, 30)$ に従う i.i.d.X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ を考える．標本平均 $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ 対して統計量

$$T = \frac{\bar{X}_n - 1500}{30} \times \sqrt{n}$$

は標準正規分布に従う．正規分布表より

$$P(T \geq 2.33) = 0.01.$$

$$\frac{\bar{X}_{20} - 1500}{30} \times \sqrt{20} \geq 2.33$$

を $\bar{X}_{20}$ について解いて $\bar{X}_{20} \geq 1515.6$. 危険率 1 %の棄却域は 1515.6 時間以上となる．したがって仮説 H は棄却され、改良されたと判断する． □

注意 2.4. 改良後も標準偏差 30 の正規分布に従っているとすると信頼度 99 パーセントの信頼区間は $P(|T| \geq 2.58) = 0.01$ を用いて

$$\left[1517 - \frac{30}{\sqrt{20}} \times 2.58,\ 1517 + \frac{30}{\sqrt{20}} \times 2.58\right]$$

と求まる．

例題 9. 総点が 1000 点である全国模試の結果、全国平均は 595 点，標準偏差 50 点であったと言う．A 高校の受験者のうち，30 人を選んで平均を計算したところ 610 点であったと言う．A 高校の受験者の成績は全国平均より高いと考えられるか？得点の分布は正規分布に従うとし、有意水準 5 パーセントで検定せよ．

ヒント：

帰無仮説 H: A 高校の模試の得点分布は $N(595, 50)$ に従う。

対立仮説 H': A 高校の模試の得点分布の平均は 595 点より高い．

の検定を行うことになる．帰無仮説 H の下、A 高校の受験者の試験結果から無作為抽出して得られる標本 $X_1, \ldots, X_n$ に対して標本平均 $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots X_n}{n}$ を考えると

$$\frac{\bar{X}_n - 595}{50} \times \sqrt{n}$$

は標準正規分布に従う．一方 $N(0, 1)$ に従う確率変数 T に対して

$$P(T \geq 1.65) = 0.05$$

である．従って標本調査の結果の値 $\bar{x}_{20}$ が

$$\frac{\bar{x}_{20} - 595}{50} \times \sqrt{30} \geq 1.65$$

を満たしていれば棄却される．

例題 10 (t 分布を使った母平均の検定)．ある食品の包装には内容量 100 グラムと印してある．この食品 20 個について調べたところ平均が 98.5 グラム、標本標準偏差 3 グラムであったと言う．表示に誤りがあると言えるか? 危険率 5 パーセントで検定せよ。

解　この食品の内容量は正規分布 $N(m,\sigma^2)$ に従うと考える．ただし標準偏差 σ は未知である．

帰無仮説は

H: $m = 100$

である．20 個の標本 $X_1,\dots,X_{20}$ を抽出したとすると、標本平均, 標本標準偏差

$$\bar{X}_{20} = \frac{X_1 + \cdots X_{20}}{20}, \qquad s_{20} = \sqrt{\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \bar{X}_{20})^2}$$

で定まる統計量

$$\frac{\bar{X}_{20} - 100}{s_{20}} \times \sqrt{19}$$

は自由度 19 の t 分布に従う．t 分布表によると自由度 19 の t 分布に従う確率変数 t について

$$P\left(|t| \geq 2.09\right) = 0.05.$$

従って

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}_{20} - 100}{s_{20}} \times \sqrt{19}\right| \geq 2.09\right) = 0.05.$$

統計量 $T(X_1,\dots,X_{20}) = \frac{\bar{X}_{20}-100}{s_{20}} \times \sqrt{19}$ に標本調査の結果を代入すると

$$\frac{98.5 - 100}{3} \times \sqrt{19} = -2.18.$$

従って棄却域に入っているので棄却され、表示に誤りがあると判断される．　□