解析学A 問題 5解答

1.

(1) $\alpha > 1$が収束の必要十分条件である。まず、任意の$n \in \mathbb{N}$に対して$\lim_{x\to+0} x^n e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ゆえ十分小さい$x$に対して$e^{-\frac{1}{x}} \le x^n$. 従って十分小さい$x$に対して

$$\frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} \le x^{n-\alpha}.$$

$n > \alpha$とできるので、この広義積分は0の近傍で収束する(これは$\int_0^\varepsilon \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha}dx < \infty$を意味する). 次に$\alpha > 1$ならば任意の$R > 0$に対して$[R,\infty)$での積分が収束することを示す. $e^{-1/x} \le 1$ゆえ$\frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$. $\int_R^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx < \infty$なので、広義積分の判定条件より$\int_R^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha}dx < \infty$. また, $\alpha \ge 1$ならば

$$\int_0^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha}dx \ge \int_1^\infty \frac{e^{-1}}{x^\alpha}dx = +\infty$$

で発散する.

(2) これは∞の近傍での積分(この言い方は不正確に思うかもしれないが$[R,\infty)$での積分を指している。時々このような言い方をすることがある)が広義積分である.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

と変形することにより$x \ge 1$のとき

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \le \frac{1}{2x^{3/2}}.$$

がわかる. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}dx < \infty$なので収束がわかる.

(3) $m < 0$のとき、0の近傍の積分は広義積分である. $(1+x^n)^{-1}$は0の近傍で有界だからこの広義積分が収束する必要十分条件は$m > -1$である. $x \ge 1$での積分が収束する条件を求める. 仮に$n \le 0$ならば$x \ge 1$のとき$\frac{x^m}{1+x^n} \ge \frac{x^m}{2}$. $m > -1$のとき$\int_1^\infty \frac{x^m}{2}dx = \infty$だから$\int_1^\infty \frac{x^m}{1+x^n}dx = +\infty$. したがって$n > 0$である必要がある. $n > 0$とする. $x \ge 1$のとき$\frac{x^m}{1+x^n} = \frac{x^{m-n}}{1+x^{-n}}$だから$x \ge 1$のとき

$$\frac{x^{m-n}}{2} \le \frac{x^m}{1+x^n} \le x^{m-n}.$$

この両辺の積分が$[1,\infty)$で収束するための条件は$m-n < -1$なので積分が収束するための必要十分条件は$m > -1$かつ$n > m+1$.

2. まず$x^{-1/2}$は0の近傍で, $(1-x)^{-1/2}$は1の近傍で広義積分が収束することに注意する. したがってこの広義積分は収束する. 対称性から$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = 2\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

$x=\frac{1+t}{2}$ $(0\le t\le 1)$ と置換積分すると

$$\int_{1/2}^{1}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int_0^1\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{1}{2}dt=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}.$$

したがって $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\pi$.
(注) 置換積分は広義でない通常の積分に対して示した。この問題では広義積分なので厳密には、置換積分は広義でない範囲での置換積分に対して適用する必要がある。例えば, $x=\frac{t+1}{2}$ の変数変換で $0\le t\le 1-\varepsilon$ のとき, $1/2\le x\le 1-\varepsilon/2$ の範囲を動き、この範囲では広義積分ではないので

$$\int_{1/2}^{1-\varepsilon/2}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{1}{2}dt=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0$$

$\lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin(1-\varepsilon)=\frac{\pi}{2}$ なので、求めたい広義積分の値を得るというのが厳密な論法である. しかし、(きちんと説明ができるならば) 上記のやや省略した書き方で構わない.
3. I_1 は $r=0$ で広義積分になる. I_2 の方は $\beta>0$ のとき $r=1$ で広義積分となる. I_1 について考える. $r=e^{-u}$ $(\log 2\le u<\infty)$ と置換積分すると

$$I_1=\int_\infty^{\log 2}\frac{1}{e^{-u}u^\alpha}(-e^{-u})du=\int_{\log 2}^\infty\frac{1}{u^\alpha}du.$$

したがって $\alpha>1$ ならば収束する. I_2 を考える.

$$I_2=\int_{1/2}^1\frac{1}{r|\log r|^\beta}dr=\int_{1/2}^1\frac{1}{r(1-r)^\beta}\left|\frac{(1-r)}{\log r}\right|^\beta dr$$

と変形する. r が 1 に近い時, $\log r=\log(1+(r-1))=(r-1)-\frac{(r-1)^2}{2}+\cdots$ と展開できるので $\displaystyle\lim_{r\to 1-0}\frac{1-r}{\log r}=-1$. したがって $\displaystyle\sup_{1/2\le r<1}\left|\frac{(1-r)}{\log r}\right|<\infty$. したがって $I_2<\infty$ となるには $\beta<1$ となるのが必要十分である.
4. (1) $r=0$ の近傍の積分が広義積分. 任意の $m>0$ に対して $\lim_{r\to 0}r|\log r|^m=0$ だから任意の $\varepsilon>0$ に対して $\sup_{0<r\le 1}r^\varepsilon|\log r|^n<\infty$. $\alpha>-3$ なので ε を $\varepsilon<\alpha+3$ となるようにとる.

$$I_n=\int_0^1 r^{\alpha+2-\varepsilon}r^\varepsilon(\log r)^n dr$$

と変形できるが、$\alpha+2-\varepsilon>-1$ だからこの積分は収束する. $\alpha\le -3$ ならば $r^{\alpha+2}|\log r|^n$ は $r\to+0$ のとき r^{-1} より早く発散するため、広義積分は発散する.

(2)

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr = \int_0^1 \frac{1}{\alpha+3}(r^{\alpha+3})'(\log r)^n dr = -\int_0^1 \frac{1}{\alpha+3} r^{\alpha+3}\{(\log r)^n\}' dr \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{\alpha+3} r^{\alpha+3} n r^{-1} (\log r)^{n-1} dr \\
&= -\int_0^1 \frac{n}{\alpha+3} r^{\alpha+2}(\log r)^{n-1} dr = -\frac{n}{\alpha+3} I_{n-1}.
\end{aligned}$$

5. $x = \frac{y-m}{\sqrt{2t}}$ と変換すると

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx = \int_{m-\sqrt{2t}R}^{m+\sqrt{2t}R} \frac{e^{-\frac{(y-m)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dy.$$

$R \to +\infty$ とし,

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(y-m)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dy.$$

6.

$$\lim_{R\to\infty, S\to\infty} \int_{-R}^{S} f(x+a) dx = \lim_{R\to\infty, S\to\infty} \int_{-R+a}^{S+a} f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy.$$

7. (1) $x = \sqrt{t}$ ゆえ $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$. よって $\displaystyle\int_1^R \sin(x^2) dx = \int_1^{R^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt.$

(2)

$$\int_1^{R^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \int_1^{R^2} \frac{(-\cos t)'}{2\sqrt{t}} dt = \left[\frac{-\cos t}{2\sqrt{t}}\right]_{t=1}^{R^2} - \int_1^{R^2} \frac{\cos t}{4t^{3/2}} dt.$$

ここで $\lim_{R\to\infty} \left[\frac{-\cos t}{2\sqrt{t}}\right]_{t=1}^{R^2} = \frac{\cos 1}{2}$, $\left|\frac{\cos t}{4t^{3/2}}\right| \le \frac{1}{4t^{3/2}}$ だから $\lim_{R\to\infty} \int_1^{R^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$ は収束する.

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+mx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\frac{m}{2})^2 + \frac{m^2}{4}} dx = e^{\frac{m^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\frac{m}{2})^2} dx = e^{\frac{m^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = e^{\frac{m^2}{4}} \sqrt{\pi}.$

9. $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x) \sin x dx$ とおく. n が奇数の時, $I_n \ge 0$. 偶数の時, $I_n \le 0$. また

$$|I_n| = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)|\sin x| dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x-\pi)|\sin(x-\pi)| dx \ge \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)|\sin x| dx = |I_{n+1}|.$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ だから任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し $x \ge N\pi$ ならば $0 \le f(x) \le \varepsilon$. よって $n \ge N+1$ ならば $|I_n| = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)|\sin x| dx \le \varepsilon\pi$. 従って $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. よって交代級数に関する収束定理により

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} f(x) \sin x dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} I_k$$

は収束する．また $(n-1)\pi \leq R \leq n\pi$ となる n を n_R と書くと

$$\left|\int_0^R f(x)\sin x dx - \sum_{k=1}^{n_R} I_k\right| \leq \int_{(n_R-1)\pi}^R f(x)|\sin x| dx \leq \int_{(n_R-1)\pi}^R f(x)dx \to 0 \qquad (R\to\infty \text{ の時}).$$

従って $\lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)\sin x dx$ は収束する．

10. すべての $n\in\mathbb{N}$ についてこの広義積分は収束する．というのは，ある $C_n>0$ があって

$$x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \leq C_n e^{-x} \quad x\geq 0$$

となり，$\int_0^\infty e^{-x}dx<\infty$ だから．$J_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ である (この値はすでに問題 5 で与えられている結果から $x=y/\sqrt{2}$ と変数変換して積分するとわかる．8 月 3 日の補講の時に証明について少し触れる．重積分 $\iint_{x\geq 0,y\geq 0} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を変数変換 $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$ し，計算し，求めるのが最も簡単と思われるがそれは解析学 B の範囲の課題である)．$n\geq 1$ のとき，

$$J_n=\int_0^\infty x^n e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_0^\infty x^{n-1}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'dx=\left[-x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{x=0}^\infty+\int_0^\infty (n-1)x^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$
$$=\begin{cases}1 & n=1 \text{ の場合}\\ (n-1)J_{n-2} & n\geq 2 \text{ の場合}\end{cases}$$

以上より $n\geq 2$ のとき

$$J_n=\begin{cases}(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1\sqrt{\frac{\pi}{2}} & n=2k \text{ のとき}\\ 2k(2k-2)\cdots 2 & n=2k+1 \text{ のとき}\end{cases}$$

なお $(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1=(2k-1)!!,\quad 2k(2k-2)\cdots 2=(2k)!!$ のように書く．

11. (1) $x=\sqrt{t}y$ とすると $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{t}\displaystyle\int_0^\infty e^{-ty^2}dy$. よって $u(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}t^{-1/2}$.
(2) 微分と積分が交換できるならば

$$u^{(n)}(t)=\int_0^\infty \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-tx^2}\right)dx.$$

また，$u^{(n)}(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)t^{-\frac{1}{2}-n}$, $\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-tx^2}\right)=(-x^2)^n e^{-tx^2}$. よって

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^{n+1}}.$$

となる．これは **10** で得た結果と同じである．

12. $\displaystyle\int_t^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_0^\infty e^{-\frac{(x+t)^2}{2}}dx = e^{-\frac{t^2}{2}}\int_0^\infty e^{-tx-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\int_0^\infty e^{-y-\frac{y^2}{2t}}dy$

に注意する．最後の式は $x = y/t$ と変数変換した．したがって $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty e^{-y-\frac{y^2}{2t}}dy = 1$ を示せばよい．$\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{y^2}{2t}} = 1$ だから

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty e^{-y-\frac{y^2}{2t}}dy = \int_0^\infty \lim_{t\to\infty} e^{-y-\frac{y^2}{2t}}dy = \int_0^\infty e^{-y}dy = 1$$

としたいところだが, 積分と極限の順序交換が可能かは自明ではない．今の場合はこの順序交換ができる場合だが, それを示そう．$I(t) = \int_0^\infty e^{-y-\frac{y^2}{2t}}dy$ とおく．$t \mapsto e^{-\frac{y^2}{2t}}$ は t に関して単調増加ゆえ $t \mapsto I(t)$ は単調増加で $I(t) \le \int_0^\infty e^{-y}dy = 1$．従って, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対してある t_0 が存在して $I(t_0) \ge 1-\varepsilon$ となることを示せばよい．$\int_0^\infty e^{-y}dy = 1$ だから $R > 0$ を適当に取ると $\int_0^R e^{-y}dy \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}$．$t_0$ を十分大きく取れば $t \ge t_0$ ならば $\min_{0\le y\le R} e^{-\frac{y^2}{2t}} \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ とできる．この t_0 に対して $t \ge t_0$ のとき

$$I(t) > \int_0^R e^{-y-\frac{y^2}{2t}}dy \ge \int_0^R e^{-y}(1-\frac{\varepsilon}{2})dy \ge \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 > 1-\varepsilon.$$

従って $\lim_{t\to\infty} I(t) = 1$.
(注) ロピタルの定理を用いることもできる.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t\int_t^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx}{e^{-\frac{t^2}{2}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\int_t^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx - te^{-\frac{t^2}{2}}}{-te^{-\frac{t^2}{2}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{-e^{-\frac{t^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2e^{-\frac{t^2}{2}}}{-e^{-\frac{t^2}{2}} + t^2e^{-\frac{t^2}{2}}} = 1.$$

ただし、ロピタルの定理を用いてしまうとどの項が極限の計算に影響を与える主要項なのかがはっきりしない．上で書いた証明の方が収束の意味がわかるであろう．またロピタルの定理を使う時は、適用できるかどうかのチェックも忘れないようにしなければならない.