解析学 A 問題 5

広義積分でよく使う極限をまとめておきます。

• $x \to \infty$ で
x は $(\log x)^m$ $(m > 0)$ より大きい.i.e., $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{|\log x|^m} = \infty$
a^x $(a > 1)$ は x^m $(m > 0)$ より大きい.i.e., $\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^m} = \infty$

• $x \to 0$ で
x は $\frac{1}{|\log x|^m}$ $(m > 0)$ より小さい.i.e., $\lim_{x\to 0} x|\log x|^m = 0$
$a^{-\frac{1}{x}}$ $(a > 1)$ は x^m $(m > 0)$ より小さい.i.e., $\lim_{x\to 0} a^{-\frac{1}{x}} x^{-m} = 0$

1　次の広義積分は収束するか? ただし α, n, m は実数である。

$$(1)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha}dx \quad (2)\quad \int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx\right), \quad (3)\quad \int_0^\infty \frac{x^m}{1+x^n}dx.$$

2. 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$ の値を求めよ.

3.　次の広義積分が収束するような α, β の値を求めよ。

$$I_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{r|\log r|^\alpha}dr, \quad I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{1}{r|\log r|^\beta}dr$$

4.

$$I_n = \int_0^1 r^{\alpha+2}(\log r)^n dr \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

と定める。
(1) $\alpha > -3$ ならば広義積分は収束し、$\alpha \leq -3$ ならば発散することを示せ。
(2) $\alpha > -3$ とする。I_n を I_{n-1} を用いて表せ。

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を用いて

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(-\frac{(x-m)^2}{2t})}{\sqrt{2\pi t}}dx = 1$$

を示せ。

6. $f(x)$ は任意の有界区間 $[-R, S]$ 上で有界な関数とする。更に $f(x)$ は $(-\infty, \infty)$ で広義積分可能な関数であるとする。すると $f(x+a)$ (a は勝手な実数) はやはり $(-\infty, \infty)$ で広義積分可能となり

$$\int_{-\infty}^\infty f(x+a)dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

となることを示せ。

(注) ここで $g(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で広義積分可能とは有限な極限値 $\displaystyle\lim_{R\to\infty,S\to\infty}\int_{-R}^{S} g(x)dx$ が存在するときにいう。ただし、R,S はお互いに無関係に極限をとっている。

7. $I=\displaystyle\int_1^\infty \sin(x^2)dx$ は収束することを次の要領で示せ。

(1) $x^2=t$ と置換積分することにより

$$\int_1^R \sin(x^2)dx=\int_1^{R^2}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$$

を示せ.

(2) 部分積分を用いることにより $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_1^{R^2}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$ が収束することを示せ。これより広義積分 I は収束することを示せ.

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+mx}dx$ を求めよ。

9. $f(x)$ $(x\geq 0)$ を単調減少で $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ となる関数とする。$\int_0^\infty f(x)\sin x dx$ は収束することを示せ。

ヒント：交代級数に関する Leibniz の定理を用いてみよ。

10. 部分積分を用いて

$$J_n=\int_0^\infty x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

の値を求めよ。

11. (1) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて積分

$$u(t)=\int_0^\infty e^{-tx^2}dx$$

を求めよ。

(2) 形式的に微分と積分 $\frac{d}{dt}$ と $\int_0^\infty$ の順序を交換して

$$u'(t)=\frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-tx^2}dx=\int_0^\infty\frac{d}{dt}\left(e^{-tx^2}\right)dx=-\int_0^\infty x^2e^{-tx^2}dx.$$

ここで $t=1$ とすれば $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx$ が求まる。実は一般的には上のように微分と積分の順序を交換すると値が違ってしまうことがある。しかし上の場合は正しいことが証明できる。同様にして $\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx$ を計算せよ。

12. 極限値

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t\int_t^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx}{e^{-\frac{t^2}{2}}}$$

を求めよ.