解析学A 問題 3解答

1. $f(x)=\exp\Big\{\sin x\,\log\left(\log(1+x)\right)\Big\}$ なので合成関数の微分法を繰り返し用い,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big[\sin x\,\log\left(\log(1+x)\right)\Big]'\exp\Big\{\sin x\,\log\left(\log(1+x)\right)\Big\} \\ &= \Big[\cos x\,\log\left(\log(1+x)\right)+\sin x\Big\{\log\left(\log(1+x)\right)\Big\}'\Big]f(x). \end{aligned}$$

$$\Big\{\log\left(\log(1+x)\right)\Big\}'=\log'\left(\log(1+x)\right)\left(\log(1+x)\right)'=\frac{1}{(1+x)\log(1+x)}.$$

ゆえに

$$f'(x)=\left\{\cos x\,\log\left(\log(1+x)\right)+\frac{\sin x}{(1+x)\log(1+x)}\right\}\left(\log(1+x)\right)^{\sin x}.$$

nを自然数とする. $a_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi, b_n=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$ とおき, $A_n:=f(a_n)=\log\left(1+\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$, $B_n:=f(b_n)=\frac{1}{\log\left(1+\frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)}$ と定めると $\lim_{n\to\infty}A_n=+\infty$, $\lim_{n\to\infty}B_n=0$. $f(x)$ は連続関数なので、 中間値の定理より区間 $[a_n,b_n]$ で f は区間 $[B_n,A_n]$ の値を全て取る. (注： A_n,B_n が最大値, 最小値だと言っているわけではない, 微分を計算してあるので、最大か最小かはわかるはず、各自チェック!). $\lim_{n\to\infty}A_n=+\infty$, $\lim_{n\to\infty}B_n=0$ なので $f(x)$ は $(0,\infty)$ の値を無限回取ることになる. また, $f(x)$ は決して 0 にはならない. 従って (2) の答えは単射でない, (3) の答えは 値域は 正の実数全体ということになる.

2. (1) は等比級数の部分和の公式そのもの. (2) は (1) から直ちに従う. (3) を $-1<x<0$ の場合に示す. $0\le x\le 1$ の方はもっと簡単.

$$\left|\int_0^x\frac{(-t)^{(n+1)}}{1+t}dt\right|=\left|\int_{-|x|}^0\frac{t^{n+1}}{1+t}dt\right|=\left|\int_0^{|x|}\frac{s^{n+1}}{1-s}ds\right|\le\int_0^{|x|}\frac{s^{n+1}}{1-|x|}ds=\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1-|x|)}\to 0.$$

3. $a_{2k-1}>a_{2k}>a_{2k+1}>0$ なので

$$\begin{aligned} &S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}>S_{2n}=S_{2n-2}+a_{2n-1}-a_{2n}>S_{2n-2} \\ &S_{2n+1}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n}-a_{2n+1})<a_1. \end{aligned}$$

従って $\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加な有界数列. よって, 実数の連続性 (完備性) より $\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ は収束する. 一方, 奇数項の極限は $\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=0$ を用い,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}S_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}+a_{2n+1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}a_{2n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}S_{2n}. \end{aligned}$$

のように偶数項の極限と一致する. 従って $\lim_{n\to\infty}S_n$ は収束する. $\alpha=\lim_{n\to\infty}S_n$ とおくと $|S_n-\alpha|\le|a_{n+1}|$ のように収束の早さもわかる.

解析学 A 問題 4

1. 定数 a_1, a_2, a_3 と $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で定義された C^∞ 関数 $f(x)$ で次をみたすものがあるとする。

$$\tan x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + f(x), \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0. \tag{2}$$

(i) a_k $(1 \le k \le 3)$ は一意的に決まることを示せ。

(ヒント: (1), (2) をみたす a_k, $f(x)$ が二つあるとしてそれらが同じであることを示せば良い。)

(ii) a_k を次の二つの方法で求めよ。

(a) $\tan x$ のテイラー展開

$$\tan x = \tan'(0)x + \frac{\tan''(0)}{2!}x^2 + \frac{\tan^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{\tan^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4 \qquad (0 < \theta < 1) \tag{3}$$

を用いて a_k $(1 \le k \le 3)$ を求めよ。

(b) $\sin x$, $\cos x$ のテイラー展開から $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 関数 $g(x)$, $h(x)$ で次の性質をもつものがあることがわかる。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + g(x), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^3} = 0 \tag{4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + h(x), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x^3} = 0 \tag{5}$$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ と関係式 (4),(5) を用いて a_k を求めよ。

(注)　上記の f, g, h について $f(x) = o(x^3)$, $g(x) = o(x^3)$, $h(x) = o(x^3)$ などと書く. 一般に x が小さい時 $|f(x)| \le C|x|^n$ のとき, $f(x) = O(x^n)$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = 0$ のとき, $f(x) = o(x^n)$ のように書く. これらを Landau の記号と言う.

2. $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{(e^x - e^{-x})^2}$ $(x > 0)$ とおく.

(i) e^x の 0 の周りのテイラー展開を用い $\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x) = 0$ を示せ.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{f(x)}{x^n}$ が有限な値に収束するような n の値と極限値を求めよ.

(iii) $\inf_{x>0} f(x) = 0$, $\sup_{x>0} f(x) = 1$ を示せ. $f(x)$ は 0, 1 という値を取るか. すなわちこれらは最小値, 最大値になるか?