解析学 A 問題 3

1. $f(x) = (\log(1+x))^{\sin x}$ $(x > 0)$ とおく.
(1) $f'(x)$ を求めよ.
(2) $f(x)$ は単射か? (関数が単射とは $x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$ となる, すなわち一対一対応のときに言う).
(3) 関数 $f(x)$ の値域を求めよ. (関数の値域とは関数 $f(x)$ の取る値全体の集合を言う).

2. $f(x) = \log(1+x)$ について $-1 < x \leq 1$ のとき、

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \tag{1}$$

と Taylor 展開できることがわかる。これを以下にしたがって証明せよ。
(1) $\dfrac{1}{1+t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k + \frac{(-t)^n}{1+t}$ を示せ。
(2) $\log(1+x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}dt \quad (-1 < x < 1)$ を用いて、

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}dt \tag{2}$$

を示せ。
(3) $-1 < x \leq 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty}\int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}dt = 0$ を示し (1) を証明せよ。
3. **2** で $x = 1$ とすると

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

なる級数展開を得る. このような正負交互に符号の変わる無限級数を交代級数と言う. 一般に数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

(i) すべての n について $a_n > 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
(ii) 単調減少: $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$

のとき交代級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束する.
　これを次に従って示せ:
　$S_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i$ と部分和を定める.

$$S_2 < S_4 < \cdots < S_{2n} < S_{2n+1} < a_1$$

を示し $\lim_{n\to\infty} S_n$ が収束することを示せ.