解析学 A 問題 2

- 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは「任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta>0$ が存在して $|x-a|<\delta$ となる x に対して $|f(x)-f(a)|\leq\varepsilon$ となる」ことを言う。
- 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続でないとは「ある $\varepsilon>0$ が存在し, 任意の $\delta>0$ に対して $|x-a|<\delta$ を満たす x で $|f(x)-f(a)|\geq\varepsilon$ となるものが存在する」ことを言う。

1. $f(x)=x^n$ は各 $x=a$ で連続である。これを以下に従い示せ。

   (1) $|x-a|\leq 1$ のとき

   $$|x^n-a^n|\leq\{(1+|a|)^n-|a|^n\}|x-a|$$

   を示せ。(ヒント：2 項定理。)

   (2) $|x-a|\leq\delta$ ならば $|x^n-a^n|\leq\varepsilon$ となる δ を一つ求めよ。

2. $x>0$ に対して,

   $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{p} & x \text{ が有理数で } x=\frac{q}{p}\ (p,q \text{ は正整数}) \text{ と既約分数で表されるとき} \\ 0 & x \text{ が無理数のとき}\end{cases}$$

   と定める。$f(x)$ は有理数で不連続, 無理数で連続であることを示せ。不連続の方は ε としてどんな数が取れるか?