# 数理統計学演習問題

**1.** 関数 $f_a(x)$ を $f_a(x) = 0$ ($x < -1$ のとき), $f_a(x) = a$ ($-1 \le x \le 0$ のとき), $f_a(x) = a(1-x)$ ($0 < x \le 1$ のとき), $f_a(x) = 0$ ($x > 1$ のとき) と定める．
(1) $f_a$ が確率密度関数になるように $a$ の値を定めよ．
(2) $f_a$ を確率密度関数とする確率分布の平均, 分散を求めよ．
**2.** 確率変数 $X$ の分布は指数 $\lambda$ の指数分布に従うとする．確率変数 $\sqrt{X}$ の平均、分散を求めよ．また $\sqrt{X}, 2X^2$ の分布の確率密度関数を求めよ．
**3.** 4 個の根元事象からなる標本空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ を考える．確率は $P(\{\omega_i\}) = 1/4 \ \ (1 \le i \le 4)$ のように等確率で与えられているとする．３つの確率変数 $X, Y, Z$ を以下のように定める：

$$\begin{aligned}
X(\omega_1) = X(\omega_2) = 1, &\qquad X(\omega_3) = X(\omega_4) = 0,\\
Y(\omega_2) = Y(\omega_3) = 1, &\qquad Y(\omega_4) = Y(\omega_1) = 0,\\
Z(\omega_3) = Z(\omega_1) = 1, &\qquad Z(\omega_2) = Z(\omega_4) = 0.
\end{aligned}$$

(1) $X$ と $Y$ は独立, $Y$ と $Z$ は独立, $Z$ と $X$ は独立であることを示せ．
(2) $X, Y, Z$ は独立でないことを示せ．また $X+Y$ と $Z$ は独立でないことを示せ．
**4.** 2 次元確率変数 $(X, Y)$ の同時分布が確率密度関数 $f(x, y) = \dfrac{3}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(3x^2+6xy+6y^2)}$ をもつ正規分布に従うとする．
(1) $E[(X-Y)^2]$ を計算せよ．
(2) $X, Y$ の周辺分布をそれぞれ求めよ．またその分散を計算せよ．
(3) $X+Y$ と $aX-Y$ が独立になるための $a$ に対する条件を求めよ．
**5.** (1) 確率変数 $X$ が正規分布 $N(30, 144)$ に従うとする．確率 $P(18 \le X \le 54)$ を求めよ．
(2) サイコロを 144 回振った時 1 または 2 の目の出た回数を $X$ とする．$X$ の平均, 分散を求めよ．また, 中心極限定理と半整数の補正を用いて確率 $P(40 \le X \le 60)$ を求めよ．
**6.** さいころを $n$ 回投げて、1 の目の出る回数を $S_n$ とする．
(1) $n = 180$ とする．$P(20 \le S_n \le 45)$ となる確率を求めよ．
(2) $\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{6}\right| \le 0.03$ となる確率が 0.95 以上になるようにするには $n$ はどの程度大きい必要があるか．
(注)　この問題は数年前の高校の数学 C の教科書に載っていた例題．
**6'** サイコロを $n$ 回振ったとき 6 の出る比率と 1/6 の差が 0.01 以内である確率が 0.9 以上であるためには $n$ はどのくらい大きければよいか．
**7.** あるテレビ番組の視聴率は 30 %であると言う．ある地域で視聴率調査を行って見て、1000 軒でのうち 330 軒以上で視聴されている確率を求めよ．
**8.** $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ は標準正規分布に従う独立確率変数とし、$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とおく．

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \le a\right) = 2\int_0^{a\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad a > 0$$

$$\log_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \ge a\right) = -\frac{a^2}{2}$$

を示せ (2 番目の確率の極限の決定は大偏差確率の評価の問題である)．$\frac{S_n}{n}$ の大きさが 0.01 より小さい確率が 0.9 以上であるためには $n$ はどの程度大きい必要があるか決定せよ．
**9.** $X_i$ ($1 \le i \le n$) は正規分布 $N(10, 4)$ に従う独立確率変数とし、$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とおく．$\frac{S_n}{n}$ の平均, 分散を求めよ．$|\frac{S_n}{n} - 10|$ が 0.2 より小さい確率が 0.95 以上となるような $n$ の範囲を求めよ．