確率論 レポート問題

以下の中から 4 題以上を選んで解いてレポートをまとめ、1 月 24 日の講義の終了後、提出すること。

1. (1) $\mathbb{R}^d$ 上の密度関数を持つ確率測度, $d\mu_n(x) = f_n(x)$, $d\mu(x) = f(x)dx$ を考える. ただし, dx はルベーグ測度. $f_n(x) \to f(x)$ $a.e.x$ のとき, μ_n は μ に弱収束することを示せ.

(2) 確率変数 X_n が確率変数 X に確率収束するとき, X_n は X に法則収束することを示せ.

2. $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ を 平均 0, 分散 1 の i.i.d. とする. $S_n = \dfrac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}}$ の分布は標準正規分布に収束することが知られている (中心極限定理). しかし, S_n は確率収束はしないことを示せ.

3.[Borel-Cantelli の補題] 事象 $A_n \subset \Omega$ が $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ を満たすとき, $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ を示せ.

4. $\{X_t(\omega)\}_{0\le t\le T}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された確率過程とする. すなわち, 各 $X_t(\omega)$ は $\mathcal{F}$-可測とする. $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$ P-$a.s.\,\omega$ となる確率過程で (除外集合は t に依存してよい),

$$P\left(\{\omega \in \Omega \mid t(\in [0,T]) \mapsto \tilde{X}(t,\omega) \text{ は連続 }\}\right) = 1$$

となるとき, このような $\{\tilde{X}_t\}$ を $\{X_t\}$ の連続修正と言う.

(1) $X_t(\omega)$ が連続修正 $\tilde{X}_t(\omega)$ を持つとする. $M(\omega) = \max_{0\le t\le T} \tilde{X}_t(\omega)$ とおくと, M は $\mathcal{F}$-可測であることを示せ. また, $M(\omega)$ は X_t の連続修正のとり方によらず, ほとんどすべての ω で一致することを示せ (特に, M の分布は連続修正のとり方によらず一意に定まる).

(2) $0 < \beta < 1$ が存在して, 任意の $p \ge 1$ に対して,

$$E[|X_t - X_s|^p] \le C_p |t-s|^{\beta p} \quad 0 \le s \le t \le T$$

とする. このとき, X_t には連続修正が存在する. これを次に従って示せ.

(i) $X_t^n(\omega)$ を $X_{2^{-n}kT}^n(\omega) = X_{2^{-n}kT}(\omega)$, $X_t^n(\omega)$ は 各区間 $[2^{-n}kT, 2^{-n}(k+1)T]$ では線形となるように定める $(k = 0, 1, \ldots, 2^n)$. 以下, 関数 $t(\in [0,T]) \mapsto f_t$ に対して, $\|f\| = \max_{0\le t\le T} |f_t|$ と定める.

$$\|X^n - X^{n+1}\| \le \max_{0\le k\le 2^{n+1}-1} |X_{2^{-(n+1)}kT} - X_{2^{-(n+1)}(k+1)T}|$$

$$P\left(\|X^n - X^{n+1}\| \ge r\right) \le \frac{C_p}{r^p}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{\beta p - 1}$$

を示せ.

(ii) 確率 1 の ω に対して, $X_t^n(\omega)$ は一様収束の位相で収束することを示せ. また, 極限の連続確率過程 $\tilde{X}_t(\omega)$ は $X_t(\omega)$ の連続修正であることを示せ.

(注) 実際は, ヘルダー連続であることも示せる. これが, Kolmogorov の連続変形 (修正) 定理である.

(iii) $p \geq 1$ とする．確率変数 X は $\varepsilon > 0$ が存在して, 十分大きな r に対して,

$$P(|X| > r) \leq \frac{C'_p}{r^{p+\varepsilon}}$$

を満たすとする．このとき, $X \in L^p$ であり,

$$E[|X|^p] = \int_0^\infty pr^{p-1} P(|X| > r) dr$$

を示せ.

(iv) $p \geq 2$ とする．(i), (iii) を用い,

$$E[\|X^n - X^{n+1}\|^p] \leq p\left(C_{p-1} + C_{p+1}\right)\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{\beta(p-1)-1}$$

を示せ．$p > 1 + \frac{1}{\beta}$ のとき, この評価を用い, $E[\|\tilde{X}\|^p] < \infty$ となること, $\tilde{X}_t$ は X_t の連続修正であることを示せ．また, $E[\|\tilde{X}\|^p]$ を C_{p-1}, C_{p+1} を用いて評価せよ.

(v) (iv) の評価式を用い, 一次元ブラウン運動 B_t ($B_0 = 0$ とする) に対して十分小さな $\varepsilon > 0$ を取れば

$$E[e^{\varepsilon\|B\|^2}] < \infty$$

となることを示せ.

5. $A = (a_{ij})$ を $d \times d$ 非負値対称行列, $m = {}^t(m_i) \in \mathbb{R}^d$ とする．$H = (\ker A)^\perp$ (内積はユークリッド内積) と定める.
(1) H は A の不変部分空間であり, A は H 上全単射であることを示せ.
(2) $H_m = \{x + m \mid x \in H\}$ とおく．H_m 上の関数

$$f_{A,m}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\dim H}\sqrt{|\det A_H|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(A_H^{-1}(x-m), (x-m)\right)\right)$$

を考える．ただし, A_H は A を H に制限して得られる線形写像. H_m 上のルベーグ測度を dx_{H_m} とし dx_{H_m} に絶対連続な H_m 上の確率測度 $f_{A,m}(x)dx_{H,m}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の共分散行列 A, 平均 m のガウス測度と言う．ここでは, $\mu_{m,A}$ と表す．A, m を陽に示さず単に ガウス分布と言う．分布 $\mu_{m,A}$ の特性関数 $\widehat{\mu_{m,A}}(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(z,x)} d\mu_{m,A}(x)$ は

$$\exp\left(i(m,z) - \frac{1}{2}(Az, z)\right) \qquad (\star)$$

となることを示せ.
(注) 特性関数が $(\star)$ のような形で与えられる確率測度を共分散行列 A, 平均 m のガウス測度と言っても同じである．また, この方が, 部分空間を考える必要が無いので, 述べやすい．しかし, $(\star)$ が特性関数であるような確率測度の存在は初学者には自明ではない.
(3) $m_k \in \mathbb{R}^d$, A_k は非負対称行列とする．μ_{m_k,A_k} が 弱収束するための必要十分条件は m_k, A_k の各成分が収束することであることを示せ.

(4) (2) の状況で

$$\int_{H_m} x_i f_{A,m}(x) dx_{H_m} = m_i, \quad \int_{H_m} (x_i - m_i)(x_j - m_j) f_{A,m}(x) dx_{H_m} = a_{ij},$$

を示せ. すなわち, 実際に, 分布 $\mu_{m,A}$ の平均, 共分散行列はそれぞれ, m, A と一致している. ただし, a_{ij} は A の (i,j) 成分.

(5) 1 次元確率変数の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ がガウス型確率変数族 (ガウス系とも言う) とは任意の有限個の確率変数 $(X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_d})$ の分布が $\mathbb{R}^d$ 上のガウス分布であるときに言う. $\{X_1, \ldots, X_d\}$ がガウス型確率変数のとき, $\{\sum_{j=1}^d a_{ij} X_j\}_{i=1}^d$ もガウス型であることを示せ.

(6) $\{X_1, \ldots, X_d\}$ がガウス系とする. $\{X_1, \ldots, X_d\}$ が独立であるのは, 共分散が 0, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ $(1 \le i \ne j \le d)$ であることと同値であることを示せ.

6. B_t を 1 次元ブラウン運動とする. ただし, $B_0 = 0$ とする.

(1) $E\left[\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{B_n}{n}\right)^4\right] < \infty$ を示し,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n(\omega)}{n} = 0 \quad \text{a.s.}\,\omega$$

を示せ.

(2)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t(\omega)}{t} = 0 \quad \text{a.s.}\,\omega$$

を示せ.

7. $\{\xi_k(\omega)\}_{k=0}^\infty$ を平均 0, 分散 1 の正規分布に従う, i.i.d. とする. $0 \le t \le \pi$ に対して

$$X_l(t,\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=2^l+1}^{2^{l+1}} \frac{\sin kt}{k} \xi_k(\omega) \quad l = 0, 1, \ldots$$

と定義する.

(1)

$$|X_l(t,\omega)|^2 \le \left| \sum_{k=2^l+1}^{2^{l+1}} \frac{e^{ikt}}{k} \xi_k \right|^2 = \sum_{k=2^l+1}^{2^{l+1}} \frac{\xi_k^2}{k^2} + \sum_{k=2^l+1}^{2^{l+1}-1} \left| \sum_{p=1}^{2^{l+1}-k} \frac{\xi_{k+p}}{k+p} \right| \cdot \left| \frac{\xi_k}{k} \right|$$

を示し,

$$E\left[\|X_l\|^2\right] \le \frac{3}{2^{l/2}}$$

を示せ. ただし, $i = \sqrt{-1}$.

(2) $\sum_{l=0}^\infty X_l(t,\omega)$ はほとんど全ての ω について $[0,\pi]$ 上の関数として一様収束することを示せ.

(3) (2) の極限の連続確率過程を $X(t,\omega)$ とおく.

$$B_t(\omega) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} \xi_0(\omega) + X(t,\omega)$$

は 0 から出発する 1 次元ブラウン運動であることを示せ.
(注) 部分和を取ること無く, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\xi_k$ は P-$a.s.$ ω について一様収束することが示されている. また $\{t/\sqrt{\pi}, \sqrt{2/\pi}(\sin kt)/k\}$ は $H^1([0,\pi], dx)$ の完全正規直交系の一例だが, 他の完全正規直交系に変えても同様の結果が得られる. (伊藤-西尾の定理)

8. μ を $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度とする. $\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2 d\mu(x) < \infty$ となるための必要十分条件は μ の特性関数 $\hat{\mu}(z)$ が $z=0$ の近傍で C^2 級であることである. 講義では, 必要性を示した. 十分性を以下に従って示せ.
(1) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(t)$ が $t=t_0$ の近傍で C^2 級ならば

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)+f(t_0-h)-2f(t_0)}{h^2} = f''(t_0)$$

となることを示せ.
(2) $h\in\mathbb{R}$, $1\le n\le d$ とする. $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $f(z)$ に対して

$$(\Delta_{h,n}f)(z) = \frac{f(z+he_n)+f(z-he_n)-2f(z)}{h^2}$$

と定める.

$$-(\Delta_{h,n}\hat{\mu})(0) = 2\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1-\cos((e_n,x)h)}{h^2}d\mu(x)$$

を示せ.
(3) $\hat{\mu}(z)$ が 0 の近傍で C^2 級のとき, (2) を用いて, μ の 2 次モーメントは有限であることを示せ.

9. $\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ とする. μ の 第 i 成分 $(1\le i\le d)$ に関する周辺分布 μ^i を

$$\mu^i(A) = \mu(\mathbb{R}\times\cdots\times\underset{i}{A}\times\cdots\times\mathbb{R}) \qquad A\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$$

と定める.
(1) μ の特性関数を用いて μ^i の特性関数を表せ.
(2) $\{\mu_n\}\subset\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ とする. 次は同値であることを示せ.

(i) $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ は tight

(ii) すべての $1\le i\le d$ に対して $\{\mu_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ は tight.

10. **定理** $\mu_n\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$ とする.

* $\hat{\mu}_n(z)$ が各点で関数 $\varphi(z)$ に収束し, $\varphi(z)$ は $z=0$ で連続である

を仮定する. このとき, $\varphi(z)$ はある確率分布 μ の特性関数であり, μ_n は μ に弱収束する.

上記の定理を以下に従って示せ.

(i) 任意の $M>0$ に対して, 次を示せ.

$$\int_{\mathbb{R}} 2\left(1-\frac{\sin(x/M)}{x/M}\right)\mu_n(dx) = 2-\int_{-1}^{1}\widehat{\mu_n}\left(\frac{z}{M}\right)dz$$
$$2\left(1-\frac{\sin(x/M)}{x/M}\right)\geq 1 \quad \text{for } |x|\geq 2M$$

(ii) 不等式

$$\mu_n(|x|\geq 2M)\leq 2-\int_{-1}^{1}\widehat{\mu_n}\left(\frac{z}{M}\right)dz$$

を示せ.

(iii) 仮定 $*$ の下で $\{\mu_n\}$ は tight であることを示せ. また, これを用いて上記の定理を示せ. さらに, この結果を $\mathbb{R}^d$ の場合に証明せよ.

11. c,α を正定数とする. 密度関数

$$f_{c,\alpha}(x)=\frac{\alpha^c}{\Gamma(c)}x^{c-1}e^{-\alpha x}1_{(0,\infty)}(x)$$

を持つ 1 次元確率分布 $\mu_{c,\alpha}$ を (c,α) をパラメータとする Γ 分布と言う.

$$\widehat{\mu_{c,\alpha}}(z)=(1-i\alpha z)^{-c}$$

を示し, $\mu_{c,\alpha}$ は無限分解可能であることを示せ.

12. ξ_k $(1\leq k\leq n)$ を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う i.i.d. とする. $\chi_n=\sum_{k=1}^n \xi_k^2$ の分布を自由度 n の χ^2 分布と言う. χ_n の特性関数を求め, 無限分解可能であることを示せ. また, Levy 測度は

$$\frac{n}{2x}e^{-2x}1_{(0,\infty)}(x)dx$$

であることを示せ.

13. ξ_n $(n=1,2,\ldots)$ を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う i.i.d. とする. $a_n>0$ かつ $\sum_{n=1}^\infty a_n^2<\infty$ とする. 確率変数の和 $X=\sum_{n=1}^\infty a_n(\xi_n^2-1)$ は L^2 収束することを示せ. また, X の分布の Lévy 測度を求めよ. 一般に, $\mathbb{R}$ 上の無限分解可能分布 μ に対して ある $S\in\mathbb{R}$ が存在して $\mu(\{x\leq -S\})=0$ となるための条件は, 対応する Lévy 測度を ν とすると, $\nu((-\infty,0))=0$ かつ μ が A 型または B 型であるときであることが知られている. ただし,

(a) μ が A 型とは, $A=0$ かつ $\nu(\mathbb{R})<\infty$.

(b) μ が B 型とは, $A=0$ かつ $\nu(\mathbb{R})=+\infty$ かつ $\int_{|x|<1}|x|\nu(dx)<\infty$.

これを X の分布の場合に確かめよ.

14. あなたが勉強した確率論に関係する内容・定理等で興味を持ったことについて説明して下さい。