解析学概論 D レポート問題 2

以下の **1**〜**5** の中から少なくとも 2 問以上を選んで解答せよ。

1. $(X,(,))$ をヒルベルト空間とする．X の点列 $\{x_n\}_{n=1}$ が $x(\in X)$ に弱収束するとは任意の $y \in X$ に対して $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x, y)$ となるときに言う．

(1) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正規直交系とする．このとき $\{e_n\}$ は 0 に弱収束することを示せ．

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が x に弱収束するとき, 次が成立することを示せ．

(2) $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$
(3) $\sup_n \|x_n\| < \infty$.
(4) 適当な部分列 $\{x_{a(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ $(a(1) < a(2) < \ldots a(k) < \ldots$ は自然数列である) を取れば

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_{a(1)} + \cdots + x_{a(n)}}{n} - x \right\| = 0$$

となる．

ヒント すべての $k \ge 1$ に対して $|(x - x_{a(k)}, x - x_{a(n)})| \le \frac{1}{k^2}$ $(n > k)$ が成り立つように $\{a(k)\}$ を選ぶことができることに注意せよ．

2 X をバナッハ空間とする．$X_0 \subset X$ が稠密な部分空間で線形写像 $T : X_0 \to X$ が定義されているとする．T が X 上の有界線形作用素に拡張されるための必要十分条件はある $K \ge 0$ が存在して任意の $x \in X_0$ に対して $\|Tx\|_X \le K\|x\|_X$ となることであることを示せ．ただし，T が X 上の有界線形作用素に拡張されるとは, ある $\tilde{T} \in L(X, X)$ が存在して $\tilde{T}$ の X_0 への制限 $\tilde{T}|_{X_0}$ が T と一致するときに言う．

3. $(X, (\ ,\ ))$ をヒルベルト空間とし, $T : \mathrm{D}(T)(\subset X) \to X$ を線形作用素とする。定義域 $\mathrm{D}(T)$ は X で稠密とする。

$$Y = \{y \in X \mid \text{ある正定数 } C(y) \text{ が存在してすべての } x \in \mathrm{D}(T) \text{ について}, |(Tx, y)| \le C(y)\|x\|\}$$

と定める。
(1) Y は X の線形部分空間となることを示せ．
(2) $y \in Y$ とする。Riesz の定理を用いて, ある一意的な元 $z \in X$ が存在して任意の $x \in \mathrm{D}(T)$ に対して, $(Tx, y) = (x, z)$ となることを示せ．
(3) (2) で得られた対応 $y(\in Y) \to z$ は線形作用素となることを示せ．
(4) (3) の線形作用素を $(T^*, \mathrm{D}(T^*))$ と書き, T の随伴作用素 (adjoint operator) という．すなわち $T^*y = z, \mathrm{D}(T^*) = Y$ と定義されている．T の定義域が X 全体で T が有界線形作用素であると仮定する．このとき, $\mathrm{D}(T^*) = X$, $\|T^*\| = \|T\|$ が成り立つことを示せ．

4. $X = L^2((0,1), dt)$ と定める．$C_0((0,1))$ を $(0,1)$ 上の連続関数で台がコンパクトなもの全体とする．$\varphi \in C_0((0,1))$ に対して

$$(S\varphi)(t) = \varphi(t) - \frac{1}{1-t}\int_t^1 \varphi(s)ds \quad 0 < t < 1$$

と定める.
(1) $\varphi(\in C_0((0,1)))$ に対して $S\varphi \in X$ となることを示せ.
(2) $\varphi \in C_0((0,1))$ のとき, 部分積分を用いて $\|S\varphi\|_{L^2}^2 = \|\varphi\|_{L^2}^2 - \left(\int_0^1 \varphi(t)dt\right)^2$ となることを示せ.
(3) **2** の結果を用いて S は X 上の有界線形作用素に一意的に拡張されることを示せ.
(4) S の adjoint operator を求めることにより,

$$(T\varphi)(t) = \int_0^t \frac{\varphi(s)}{1-s}ds, \qquad \varphi \in C_0((0,1))$$

は X 上の有界線形作用素に一意的に拡張されることを示せ. また $\|T\| \le 2$ を示せ.

5 $(X, \|\ \|)$ を $K(=\mathbb{R}\ \ or\ \ \mathbb{C})$ 上のバナッハ空間とし $T : \mathrm{D}(T)(\subset X) \to X$ を (有界とは限らない) 線形作用素とする.

$$\mathrm{Ran}(\lambda - T) = \{(\lambda - T)x \mid x \in \mathrm{D}(T)\}$$

を作用素 $\lambda - T$(λI を簡単に λ と書いている) の像とする. 次の性質を満たす数 $\lambda(\in K)$ 全体の集合を T のレゾルベント集合 (resolvent set) と呼び $\rho(T)$ と書く.

(i) $\mathrm{Ran}(\lambda - T) = X$

(ii) $\lambda - T : \mathrm{D}(T) \to X$ は 1 対 1 対応

(iii) 逆写像 $(\lambda - T)^{-1} : X \to \mathrm{D}(T)$ は有界線形作用素

$\sigma(T) := K \setminus \rho(T)$ を T のスペクトル集合 (spectral set) と言う.
(1) T は有界で $\mathrm{D}(T) = X$ とする. $|\lambda| > \|T\|$ とする. $S_n = I + \sum_{k=1}^n \left(\frac{T}{\lambda}\right)^k$ と定める. X 上の有界線形作用素 S が存在して

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|S_n - S\| &= 0 \\ S\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)x &= \left(I - \frac{T}{\lambda}\right)Sx = x \qquad \forall x \in X \end{aligned}$$

となることを示せ. このことから $\sigma(T) \subset \{x \in K \mid |x| \le \|T\|\}$ を示せ.
(2) $(T, \mathrm{D}(T))$ を (有界とは限らない) 線形作用素とする. $\lambda \in \rho(T)$ とする. $|\mu - \lambda| < \dfrac{1}{\|(\lambda - T)^{-1}\|}$ を満たす μ について $\mu \in \rho(T)$ となることを示せ. (従って, レゾルベント集合は開集合, スペクトル集合は閉集合であることがわかる).
(3) $X = C([0,1])$, $\|\varphi\| = \max_x |\varphi(x)|$ と定める. $(T\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$ $(0 \le t \le 1)$ と定めると T は X 上の有界線形作用素であることを示せ. また $\|T^n\| \le \frac{1}{n!}$ となることを示せ. これを用いて $\sigma(T) = \{0\}$ となることを示せ.

ヒント (2) $\mu - T = \lambda - T + (\mu - \lambda) = \left(I + (\mu - \lambda)(\lambda - T)^{-1}\right)(\lambda - T)$ と変形できることに注意せよ.
(3) $\lambda \neq 0$ のとき $I - \frac{T}{\lambda}$ が有界な逆作用素を持つことを示す必要があるが、その候補として (1) で定義した S_n の極限を考えてみよ. なお、S を定める作用素の無限級数を Neumann 級数という.