解析学概論 D レポート問題 1(〆切は 12 月 16 日)

$\rho(x)$ をルベーグ可測な非負関数で, 任意の $K>0$ について、

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{K|x|}\rho(x)dx < \infty,$$

となるものとする。以下, $d\mu(x)=\rho(x)dx$ と定め、ヒルベルト空間を $X=L^2(\mathbb{R},d\mu)$ と定義する。このとき、

定理 1 $\mathcal{P}:=\{\mathbb{R}$ 上の多項式の全体$\}$ とすると $\mathcal{P}$ は X の中で稠密である.

この定理に関する以下の**問 1–問 5** を解いてレポートとして提出せよ。

問 1. X に属す関数列 $\{1,x,x^2,\ldots,x^n,\ldots\}$ から Schmidt の直交化法で得られる多項式からなる関数列を $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ とする。**定理 1** を用いて $\{e_n\}$ は完全正規直交系であることを示せ。

注：

(1) 上のようにして得られる多項式を直交多項式という。

(2) 仮定 $(*)$ はベストな仮定ではない。実際、$\rho(x)=x^k e^{-x}\ (x>0)$, $\rho(x)=0\ (x\le 0)$ のとき多項式全体は稠密で $\{1,x,x^2,\ldots\}$ に Schmidt の直交化法を用いて得られる関数は Laguerre 培多項式とよばれるものである。しかし、$(*)$ に類する仮定無しに定理は成立しない。その反例 (H.Hamburger, 1919) をあげる。

$$\rho(x)=\begin{cases} e^{-\frac{\pi x}{(\log x)^2+(\pi)^2}} & (x>0\text{ のとき}) \\ 0 & (x\le 0\text{ のとき}) \end{cases}$$

とする。この $\rho(x)$ は $(*)$ を満たさない。

$$g(x)=e^{\frac{\log|x|}{(\log|x|)^2+\pi^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{|x|}\log|x|+\pi}{(\log|x|)^2+\pi^2}\right)$$

とおくと $g\in L^2(\mathbb{R},d\mu)$ かつ $g\ne 0$. しかし、$\int_{\mathbb{R}} x^k g(x)\rho(x)dx=0$ をみたす $(k=0,1,2,\ldots)$. つまり、$\mathcal{P}$ は $L^2(\mathbb{R},\rho(x)dx)$ で稠密ではない。

(3) Weierstrass の多項式近似定理によると $\mathcal{P}$ は $[a,b]$ 上の連続関数全体の集合 $C([a,b])$ の中で一様収束の位相 (sup norm の位相) に関して稠密である。このことと $C([a,b])$ は $L^2([a,b],dx)$ で稠密であること (下の**定理 3** から従う) から $\mathcal{P}$ が $L^2([a,b],dx)$ で稠密であることも容易にわかる。しかし、$\mathbb{R}$ 上では、連続関数が多項式で一様に近似できるわけではないので、こうは単純には行かない。ここでは、フーリエ級数を用いて**定理 1** を示そう。まず、測度 μ の次の性質に注意する。

定理 2 ε を任意の正数とする。任意のボレル可測集合 $E\subset\mathbb{R}$ に対して、コンパクト集合 K, 開集合 G で $K\subset E\subset G$ かつ $\mu(G\setminus K)\le\varepsilon$ となるものが存在する。

この定理から次がわかる。

定理 3 任意の $f\in L^2(\mathbb{R},d\mu)$ と $\varepsilon>0$ に対して、コンパクトサポートをもつ連続関数 f_ε で $\|f-f_\varepsilon\|_{L^2(\mu)}\le\varepsilon$ をみたすものが存在する。

ただし、連続関数 f のサポート (正確には" 位相的台" =topological support) とは $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ の閉包のこと (サポートは一般に超関数に対して定まるが、ここで与えた定義はその定義から従うもの) で、supp f と書かれる。supp f が有界閉集合であるとき、f はコンパクトサポートを持つと言う。

問 2. $\varphi(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数で

(1) $\varphi(x) = 1$ for $|x| \leq \frac{1}{3}$, $\varphi(x) = 0$ for $|x| \geq 2$

(2) $\varphi(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$,

(3) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1.$

を満たす関数とする。$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ とおき、$\mathbb{R}$ 上の連続関数 f に対して、

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y)f(y)dy \tag{1}$$

と定める。f をコンパクトサポートをもつ連続関数とする。$\varphi_\varepsilon * f$ はコンパクトサポートをもつ C^∞ 関数で $\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}} |(\varphi_\varepsilon * f)(x) - f(x)| = 0$ となることを示せ。(φ_ε を mollifier という。)

問 3 問 2 と**定理 3** を用いて、任意の $\varepsilon > 0$ と $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ に対して、あるコンパクトサポートをもつ C^∞ 関数 f_ε が存在して、$\|f - f_\varepsilon\|_{L^2(\mu)} \leq \varepsilon$ となることを示せ。

問 4. 問 3 の f_ε を考える。supp $f_\varepsilon \subset (-l, l)$ となる正数 R をとり、f_ε を周期 $2l$ の周期関数に拡張したものを $f_{\varepsilon,l}$ と書く。このとき、R を十分大きく取れば、$\|f - f_{\varepsilon,l}\|_{L^2(\mu)} \leq 2\varepsilon$ となることを示せ。

問 5 g を $\mathbb{R}$ 上の周期 $2l$ の C^1 級の周期関数とする。このとき、フーリエ級数の理論から

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right) \tag{2}$$

と一様収束の位相でフーリエ級数展開されることが知られている。ただし、$a_0 = \int_{-l}^{l} g(x)\frac{1}{\sqrt{2l}}dx$, $a_n = \int_{-l}^{l} g(x)\frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{\sqrt{l}}dx$, $b_n = \int_{-l}^{l} g(x)\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{\sqrt{l}}dx$.

$$g_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}}a_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right). \tag{3}$$

とおく。$g_N(x)$ の各項の $\sin, \cos$ を第 M 項まで Taylor 展開して得られる g_N の近似多項式を $g_{N,M}(x)$ とする。仮定 $(*)$ とルベーグの優収束定理を用いて、

$$\lim_{M\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |g_N(x) - g_{N,M}(x)|^2 d\mu(x) = 0$$

を示せ。これを用いて**定理 1** を示せ。

(注) 定理の仮定 $(*)$ は**問 5** の段階で本質的に用いられる。