数学解析 予定表

0. なぜ、関数解析が必要か?

1. 距離空間について
距離空間, 開集合, 閉集合, 連続写像完備性の復習

2. ノルム空間

(1) ノルムの定義

(2) Hölder の不等式、Minkowski の不等式

(3) l^p, L^p

(4) ノルム空間の位相

(5) 可分性

(6) Banach 空間の定義、例

(7) 縮小写像の原理とその応用例

(8) ノルム空間の完備化 ($\mathbb{Q}$ の完備化から $\mathbb{R}$ を作ったように、完備でないノルム空間は適当に元を加えて完備な空間にできる。$C([0,1] \to \mathbb{R})$ を L^p の位相でこの方法で完備化したものの具体的な表現が $L^p([0,1], dx)$ だと言える)

3. ヒルベルト空間

(1) プレヒルベルト空間： 定義と例

(2) ヒルベルト空間の定義, 例、l^2, L^2

(3) 完全正規直交系 (=CONS) とその性質

(4) CONS, 例、Fourier 級数、Hermite 多項式固有関数の視点、対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交すること。

(5) Parseval の等式、Bessel の不等式

(6) CONS の存在

(7) 直交射影、凸集合の場合への拡張を注意

(8) 直交補空間

4. 有界線形作用素

(1) 定義と性質

(2) 有界線形作用素全体が作用素ノルムで Banach 空間になること

(3) 有界線形作用素の例 (合成積による作用素、ヤングの不等式、マルコフ半群についての注意)

(4) Riesz の表現定理

(5) 共役空間 (双対空間) の定義と例 ($(L^p)^* = L^q$ ただし、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 \leq p < \infty$ 一般には $(L^\infty)^* \supsetneq L^1$).

(6) Neumann 級数と積分方程式 (とくに Volterra 型について)

5. 非有界作用素

(1) 閉作用素、可閉作用素の定義、例

(2) 随伴作用素、自己共役作用素

(3) スペクトル集合、レゾルベント集合 (例、Volterra 型積分作用素)

(4) コンパクト作用素の定義、スペクトルに対する注意

(5) 自己共役作用素のスペクトル分解の注意

関数解析の参考書としてシラバスにあげた以外に
1. Functinal Analysis, Reed-Simon 著, Academic Press
2. 「ヒルベルト空間と量子力学」 新井朝雄著, 共立出版
3. 「フーリエ解析と関数解析学」 新井仁之著、培風館
が参考になる。1,2 ともに量子力学を意識した内容の本である。1 は Methods of Modern Mathematical Physics の 4 巻本の最初の 1 冊目で 2 冊目以後も面白い本です。3 はフーリエ解析、ウエイブレットについても触れられている。やはり、ヒルベルト空間について書かれた本。