数学解析レポート問題 3

1. $\varphi(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の有界連続関数とする．$X = L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ とおく．$f \in X$ に対して

$$(Tf)(x) = \varphi(x)f(x)$$

と定義する．このとき，T は X 上の有界線形作用素であることを示せ．また $\|T\| = \sup_x |\varphi(x)|$ であることを示せ.

2 $h_0(x) = 1$ とし n 次多項式 $h_n(x)$ $(n \geq 1)$ を次の式で定める．

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right).$$

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n h_n(x) = e^{tx - \frac{t^2}{2}}$ を示せ.

(2) (1) を用いて $h_n'(x) = h_{n-1}(x)$ $(n \geq 1)$ を示せ.

(3) (1) を用いて $(n+1)h_{n+1}(x) - xh_n(x) + h_{n-1}(x) = 0$ $(n \geq 1)$ を示せ.

(4) $h_n''(x) - xh_n'(x) = -nh_n(x)$ $(n \geq 0)$ となることを示せ．(すなわち h_n は作用素 $L = -\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx}$ の固有値を n とする固有関数である).

(5) $e_n(x) = \sqrt{n!}h_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ とおく．$\{e_n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ はヒルベルト空間

$$X = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ はルベーグ可測で } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx < \infty \right\}$$

$$(f, g)_X = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

の完全正規直交系であることを次の定理を用いて示せ.

定理 μ を $\mathbb{R}$ 上の有限 Borel 測度で, 任意の $K > 0$ について,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{K|x|} d\mu(x) < \infty.$$

となるものとする．$X = L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ とする．このとき, $\mathcal{P} := \{\mathbb{R} \text{ 上の多項式の全体}\}$ とすると $\mathcal{P}$ は X の中で稠密である.

(6) $u_n(x) = e_n(x) \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4}}$ とおく．次を示せ.

(i) $\{u_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ は $L^2(\mathbb{R}, dx)$ の完全正規直交系である.

(ii) $\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \right) u_n(x) = nu_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$