数学解析レポート問題 2

1. $L^2([a,b],dx)$ の正規直交系 $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ について次の性質 $(\star)$ が成立するとする.

$(\star)$ すべての $[a,b]$ 上の連続関数 f について $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^\infty |(f,e_i)_{L^2}|^2$ となる.

このとき $\{e_i\}$ は完全正規直交系となることを示せ.

ヒント：$[0,l]$ 上の連続関数全体の集合は $L^2([0,l],dx)$ の中で稠密であることを用いよ.

2. $L^2([0,l],dx)$ の完全正規直交系 $e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (n = 1,2,\ldots)$ を考える. $f(x)$ $(0 \le x \le l)$ が C^1 級の関数で $f(0)=f(l)=0$ を満たすとき

$$\sum_{n=1}^\infty a_n e_n(x)$$

は $[0,l]$ で一様収束することを示せ．ただし、$a_n = (f,e_n)$ である.

3. $(X,(,))$ をヒルベルト空間とする．X の点列 $\{x_n\}_{n=1}$ が $x(\in X)$ に弱収束するとは任意の $y \in X$ に対して $\lim_{n\to\infty}(x_n,y) = (x,y)$ となるときに言う.

(1) $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ を正規直交系とする．このとき $\{e_n\}$ は 0 に弱収束することを示せ.

$\{x_n\}_{n=1}^\infty$ $(n=1,2,\ldots)$ が x に弱収束するとき, 次が成立することを示せ.

(2) $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$

(3) 適当な部分列 $\{x_{a(k)}\}_{k=1}^\infty$ $(a(1) < a(2) < \ldots a(k) < \ldots$ は自然数列である) を取れば

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x_{a(1)}+\cdots+x_{a(n)}}{n} - x\right\| = 0$$

となる.