数学解析レポート問題 1

1. 数列の空間 X を次のように定める。

$$X \quad = \quad \left\{ x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} i x_i^2 < \infty \right\}.$$

この空間は和 $x + y = (x_i + y_i)$ $(x = (x_i), y = (y_i)$ のとき), スカラー倍 $\alpha x = (\alpha x_i)$ で線形空間となることを示せ。さらに $\|x\| = (\sum_i i x_i^2)^{1/2}$ をノルムとする可分なバナッハ空間となることを示せ。

$B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ とおく．$\{x(n) \mid n = 1, 2, \ldots\} \subset B$ のとき適当な部分列 $x(n(k))$ を選ぶとある $x(\infty) \in X$ が存在して $\lim_{k\to\infty} \|x(n(k)) - x(\infty)\|_{l^2} = 0$ となることを示せ．ただし $\| \ \|_{l^2}$ は数列の l^2 ノルムを意味する．

2. $X = \{x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \mid \sup_i |x_i| < \infty, x_i \in \mathbb{R}\}$ とおく．X に **1** のように和，定数倍を定義して線形空間になることを示せ．

$x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X$ に対して $\|x\| = \sup_i |x_i|$ とおくと $\| \ \|$ は X 上のノルムになること，$(X, \| \ \|)$ はバナッハ空間になることを示せ．このバナッハ空間は可分ではないことを示せ。

3.

$$X \quad = \quad \left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \ x \text{ は連続で } \lim_{|t|\to\infty} x(t) = 0 \right\}$$

と定める．$\|x\| = \max_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$ とおくと $(X, \| \ \|)$ は自然な和，定数倍でバナッハ空間となることを示せ．