6 一変数関数の微分法

6.2 Taylor の定理

Definition 1 関数 $f(x)$ を $I = (\alpha, \beta)$ で定義された関数とする。$f(x)$ が C^n 級の関数 (n 回連続的微分可能な関数) であるということを帰納的に次のように定義する.
(1) $f(x)$ が I で微分可能でその導関数 $f'(x)$ が I で連続の時、$f(x)$ は C^1 級の関数であるという。
(2) $n \geq 2$ とする。$f(x)$ が C^n 級の関数であるとは、$f(x)$ は C^1 級の関数であり，かつ $f'(x)$ が C^{n-1} 級の関数のときに言う。n 回微分して得られる導関数を第 n 階導関数 (第 n 次導関数) とよび, $f^{(n)}(x)$ と書く。

また、何回でも微分可能な関数を C^∞ 級の関数と言う。

注意 2 単に連続な関数を C^0 級の関数ということもある。初等関数 (多項式、指数関数、対数関数、三角関数等) はその定義域で C^∞ 級関数である。

Taylor の定理とは次の定理を言う。

Theorem 3 $f(x)$ を $I = (\alpha, \beta)$ で定義された C^{n-1} 級の関数で $f^{(n-1)}(x)$ が I で微分可能とする。$a, x \in I$ とすると a と x の間の数 c が存在して、

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n. \tag{1}$$

$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ は *Lagrange* の剰余項と呼ばれる。

注意 4 (1) c はある数 $0 < \theta < 1$ が存在して $c = a + \theta(x-a)$ と書ける.
(2) 定理の仮定にさらに $f^{(n)}(x)$ が a の近くで有界な関数であるという仮定を付け加えると

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0 \tag{2}$$

となることがわかる. $x \to a$ のとき $x-a$ は当然小さい. 従って, テイラー展開した各項 $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ $(1 \leq k \leq n-1)$ も小さい量になる ($k = n-1$ の項が一番小さいと言える). 式 (2) は $x \to a$ のとき $R_n(x)$ は $(x-a)^{n-1}$ より小さいことを示しており, $R_n(x)$ は $(x-a)^{n-1}$ より高位の無限小であると言い, $R_n(x) = o((x-a)^{n-1})$ と書く. つまり, 定理の仮定と $x = a$ の近傍での $f^{(n)}(x)$ の有界性などがあると $f(x)$ は $x = a$ の周りで $f(a) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ という $n-1$ 次多項式で誤差の評価付きでよく近似できるのである.
(3) さらに $f^{(n)}(x)$ が連続関数のとき (すなわち $f(x)$ が C^n 級のとき), $R_n(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt$ のように書くこともできる.
(4) $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ のとき、

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{3}$$

右辺の級数を $x = a$ を中心とした Taylor 級数と言う ($a = 0$ のときの Taylor 級数をとくに Maclaurin 級数と言う)。
(5) (3) の剰余項を用いると $|x| < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が証明できて、次の Maclaurin 展開を得る。

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \cdots$$

これは最初に Newton が 1665 年ごろ, 類推から発見した式で、最初の厳密な証明は Abel が 1826 年ごろ与えた。
(6) $f(x)$ を $x \neq 0$ ならば $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x = 0$ では $f(x) = 0$ となる関数とすると $f(x)$ は C^∞ 級の関数ですべての n について $f^{(n)}(0) = 0$ である。したがって、このとき

$$f(x) \neq f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \tag{4}$$