

6 一変数関数の微分法

6.1 微分の定義

関数の微分は次のように定義される。

Definition 1 $y = f(x)$ を区間 $I = (\alpha, \beta)$ で定義された関数とする。 $f(x)$ が $x = a$ ($\alpha < a < \beta$ とする) で微分可能とは極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するときに言う。極限を $f'(a)$ と書く。区間 I のすべての点で $f(x)$ が微分可能のとき、 $y = f(x)$ は I で微分可能な関数と言う。 $f(x)$ が I で微分可能のとき、微分して得られる関数 $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数と言う。

$x = a$ で微分可能ということを次のように言い換えることができる。この言い換えで得られる (2) の内容は多変数関数の全微分可能性 (偏微分可能性より強い概念) という概念に拡張される。

Proposition 2 次の (1) と (2) は同値な命題である。

- (1) 区間 $I = (\alpha, \beta)$ で定義された関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能で $f'(a) = A$.
- (2) ある定数 A と I で定義された関数 $g(x)$ が存在して、次の二つをみたす:
 - (i) すべての $x \in I$ について、 $f(x) = f(a) + A(x-a) + g(x)(x-a)$.
 - (ii) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

この命題を用いると (用いなくてもできるが) 次の結果が定義に基づいて証明できる。

Theorem 3 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば $x = a$ で連続である。

前のセクションであげた初等関数は皆さんご存知のように、微分可能な関数です。どのように導関数が得られるか、概略を述べましょう。その前に、微分に関しては、

- (1) 和の微分法, (2) 積の微分法, (3) 商の微分法, (4) 合成関数の微分法, (5) 逆関数の微分法
- が基本的である。講義では、この中の合成関数、逆関数の微分法の説明を主に行う。さて、具体的に以下の関数についてどのように微分が計算されるかを見よう。

(1) 多項式

多項式の微分は $(x^n)' = nx^{n-1}$ を用いて得られる。 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は例えば、二項定理 $(x+h)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r h^r x^{n-r}$ を用いて計算できる。 $f(x), g(x)$ を多項式として、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ の導関数は商の微分法を用いて計算できる。

(2) 三角関数

角度の計り方を弧度法を採用する。すなわち、360度を 2π と見る角度の計り方である。 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が最も基本的だが、高校の教科書にのっている証明にはやや循環論法的なところがある。

(3) 指数関数

指数関数の微分法には $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ が用いられる。詳細は講義で述べる。 $a \in \mathbb{R}$ のとき $f(x) = x^a$ ($x > 0$) の微分は a が整数ならば、(1) の範囲で計算できると言えるが、そうでない時は、少し工夫を要する。

(4) 対数関数

対数関数の微分は、指数関数の微分が計算できるから、逆関数の微分法を用いても計算できるが、直接計算しても良い。

注意 4 我々は三角関数の微分と逆関数の微分法を知っているので、三角関数の逆三角関数 (例えば、 $\arcsin x$) の導関数も計算できる。例えば、 $-1 < x < 1$ に対して、

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

と計算できる。