# 1 数列の極限、関数の極限、関数の連続性について (高校の復習)

**Definition 1** (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $n$ が大きくなるとき $a_n$ が実数 $\alpha$ に限りなく近くなるとき、$\{a_n\}$ は $\alpha$ に収束するといい $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く．$n$ が大きくなるとき $a_n$ が限りなく大きくなるとき, $\{a_n\}$ は $+\infty$ に発散すると言い, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と書く．
(2) 関数 $y = f(x)$ に対して $x$ が $a$ に近づくとき $f(x)$ が $A$ に近づくとき $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ と書く．関数 $y = f(x)$ に対して $x$ が $a$ に近づくとき $f(x)$ が限りなく大きくなるとき, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ と書く．
(3) 関数 $y = f(x)$ について, 定義域の点 $a$ で極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ となるとき, 関数 $y = f(x)$ は $x = a$ で連続であるという．定義域の各点で連続な関数を連続関数と言う．

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \alpha, \infty$ の定義もあるが省略する．上の定義は直感的でわかりやすく, 初等的な段階では, これで十分だが深く学ぶには不十分である．そのため, 後で厳密な定義を学ぶ．数列の極限・関数の極限に関しては次が基本的であり, 高校の教科書にも載っている．これらも直観的には明らかだが, きちんとした極限の定義に基づいて証明することができる．

**Theorem 2** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする．このとき次が成立する．
(1) 任意の実数 $c$ に対して, $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$.
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$.
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$.
(4) $\beta \neq 0$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

**Theorem 3 (はさみうちの原理)** 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が $a_n \leq b_n \leq c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ および $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ をみたすならば $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

**Theorem 4** $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ とする．このとき次が成立する。
(1) 任意の実数 $c$ に対して, $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cA$.
(2) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B$.
(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.
(4) $B \neq 0$ のとき $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

**Theorem 5 (はさみうちの原理)** 関数 $f(x), g(x), h(x)$ に対して, $a$ の近くで $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ をみたし, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \alpha$ をみたすならば $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \alpha$.

**Theorem 6** $f(x), g(x)$ は同じ集合で定義された連続関数とする．このとき, それらの和, 積, 定数倍すなわち $f(x) + g(x), f(x)g(x), cf(x)$ も同じ集合上で連続関数である．また, $g(x) \neq 0$ ならば $\frac{f(x)}{g(x)}$ も連続関数である．

連続関数に対して, 次の性質が成り立つ．これらはこれから説明する実数の性質を用いて証明されます．

**Theorem 7 (中間値の定理)** $y = f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数とする．$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 $\alpha$ に対して, $a$ と $b$ の間の数 $c$ が存在して $f(c) = \alpha$ となる．

**Theorem 8 (最大値・最小値の存在定理)** $y = f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とする．このとき，$y = f(x)$ には最大値・最小値が存在する．ただし，$M$ が最大値であるとは $[a,b]$ のある点 $c$ で $f(c) = M$ となり，すべての $x \in [a,b]$ に対して $f(x) \le M$ となるときに言う．$m$ が最小値であるとは $[a,b]$ のある点 $d$ で $f(d) = m$ となり，すべての $x \in [a,b]$ に対して $m \le f(x)$ となるときに言う．

中間値の定理と最大値・最小値の存在定理を組み合わせると次の結果が証明できる．

**Corollary 9** $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とする．$m, M$ をそれぞれ $f(x)$ の最小値・最大値とする．$m \le \alpha \le M$ をみたす任意の $\alpha$ に対して，ある $c \in [a,b]$ が存在して $f(c) = \alpha$．すなわち $f([a,b]) = [m,M]$ である．

# 2. 実数の性質

有理数の集合 $\mathbb{Q}$ から実数の集合 $\mathbb{R}$ を構成する方法はいくつか知られているが作り方によらずそれらはすべて同じ集合と見ることができる．実数の集合と言うと数直線を思い浮かべればよく，イメージしやすいものだが，これまでの勉強ではきちんとした定義は与えられてはいないもので，定義が必要な物だと認識してほしい．実数の集合は，切れ目が無いということを表している「実数の連続性」または「実数の完備性」と呼ばれる性質を満たす．以下の Theorem 10, Theorem 12, Theorem 15 がこのことを述べている同値な命題である．

**Theorem 10** 数列 $\{a_n\}$ が次の性質をみたすとする．
(1) (上に有界) ある数 $R$ が存在してすべての $n$ について，$a_n \le R$.
(2) (単調性) すべての $n$ について $a_n \le a_{n+1}$.
　このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n$ は収束する．

この性質を用いると $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ の収束がわかる．この極限値を $e$ と書く．
上の定理はわかりやすいと思うが，次の定理 (Theorem 12) も良く用いられる実数の同値な性質である．それを述べるために言葉を用意する．

**Definition 11 (上界, 下界)** (1)　$A$ を $\mathbb{R}$ の部分集合で上に有界な集合とする．すなわちある $R \in \mathbb{R}$ が存在してすべての $x \in A$ について $x \le R$ とする．このような $R$ を $A$ の上界という．
(2) $A$ を $\mathbb{R}$ の部分集合で下に有界な集合とする．すなわちある $L \in \mathbb{R}$ が存在してすべての $x \in A$ について $L \le x$ とする．このような $L$ を $A$ の下界という．
(3) 上に有界かつ下に有界な集合を有界な集合という．

**Theorem 12** (1) $A$ を $\mathbb{R}$ の上に有界な集合とする．このとき，$A$ の上界全体の集合には最小数 $\lambda$ が存在する．すなわち，
　(i) すべての $x \in A$ に対して $x \le \lambda$.
　(ii) $\gamma$ が $A$ の上界の元ならば $\lambda \le \gamma$.

(2) $A$ を $\mathbb{R}$ の下に有界な集合とする．このとき，$A$ の下界全体の集合には最大数 $\mu$ が存在する．すなわち，
　(i) すべての $x \in A$ に対して $x \ge \mu$.
　(ii) $\gamma$ が $A$ の下界の元ならば $\gamma \le \mu$.

Theorem 12 の (1) の $\lambda$ を $A$ の上限と言い，$\sup A$ と表す．また，(2) の $\mu$ を $A$ の下限と言い，$\inf A$ と表す．$\sup A$ や $\inf A$ は $A$ の元ならば，それぞれ $A$ の最大数，最小数と言えるが，そうでないならば，それぞれ，最大数，最小数の代替物のようなものである．

**Proposition 13** (1) $A$ を $\mathbb{R}$ の上に有界な集合とする．$A$ の上限 $\lambda$ は次の性質を持つ数のことである．

(i) すべての $x \in A$ に対して $x \leq \lambda$.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $x \in A$ が存在して，$\lambda - \varepsilon < x \leq \lambda$.

(2) $A$ を $\mathbb{R}$ の下に有界な集合とする．このとき, $A$ の下限 $\mu$ とは次の性質を持つ数である．

(i) すべての $x \in A$ に対して $\mu \leq x$.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $x \in A$ が存在して, $\mu \leq x < \mu + \varepsilon$.

Theorem 12 と次の連続関数の性質を用いると中間値の定理を証明することができる．中間値の定理の証明は講義の中で解説する．

**Lemma 14** $f(x)$ をある区間 $I$ 上の連続関数とする．$c \in I$ とする．

(1) $f(c) > \alpha$ ならば $c$ を含む小さな区間 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ をとれば $f(x) > \alpha \ \forall x \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$.

(2) $f(c) < \alpha$ ならば $c$ を含む小さな区間 $[c-\varepsilon', c+\varepsilon']$ をとれば $f(x) < \alpha \ \forall x \in [c-\varepsilon', c+\varepsilon']$.

上記の Lemma 14 はグラフを書けば, 当然成り立つと予想できる．

次の定理 (有界閉区間のコンパクト性) と数列の極限に関する次の補題を用いると最大・最小の存在定理を証明できる．

**Theorem 15 ($[a,b]$ のコンパクト性)** 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \leq a_n \leq b$ を常に満たすとする．ただし, $a, b$ はある実数である．このとき、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の適当な部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $\lim_{k\to\infty} a_{n(k)}$ は収束するようにできる．また, その極限値は $[a,b]$ に含まれる．

**Lemma 16** $\lim_{n\to\infty} a_n$ が収束するならば $\{a_n\}$ の任意の部分列 $\{a_{m(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ も $k \to \infty$ のとき, 同じ値に収束する．

上の Lemma も直観的には自明である．

**例** $a_n = (-1)^n$ とすれば $a_n \in [-1, 1]$ である．また部分列 $a_{2n}$ は 1 に $a_{2n+1}$ は $-1$ に収束する．Theorem 15 はどのような有界な数列に対しても, うまく部分列を取れば, 収束するようにできると述べているのである．