2. 平面上の積分

2.1 積分の定義 (矩形上の積分)

x 軸、y 軸と平行な辺をもつ矩形 (長方形) $E = \{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [c,d]\}$ 上での積分を定義する。$f(x,y)$ を E 上の有界関数とする。

Definition 1 E の分割

$$\Delta: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

に対し、

$$\begin{aligned} S(f,\Delta) &= \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \sup\{f(x,y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j\}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ s(f,\Delta) &= \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \inf\{f(x,y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j\}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} S(f) &= \inf\{S(f,\Delta) \mid \Delta \text{ はすべての分割を動く }\} \\ s(f) &= \sup\{s(f,\Delta) \mid \Delta \text{ はすべての分割を動く }\} \end{aligned}$$

$S(f), s(f)$ については次の Darboux の定理が基本的である。

Theorem 2 Δ に対して $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ とおく。$\lim_{|\Delta|\to 0} S(f,\Delta) = S(f)$, $\lim_{|\Delta|\to 0} s(f,\Delta) = s(f)$ が成立する。

Definition 3 $S(f) = s(f)$ のとき、$f(x,y)$ は E 上可積分と言い、この共通の値を $\displaystyle\iint_E f(x,y)dxdy$ と書く。

積分に基づいて面積の定義を与える。有界集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ を考える。

$$1_A(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \in A^c \end{cases} \tag{1}$$

と定義し、1_A を A の定義関数と言う。

Definition 4 (有界集合の面積の定義) $A \subset E$ となる長方形を一つ取る。1_A が E で可積分のとき、

$$|A| = \iint_E 1_A(x,y)dxdy. \tag{2}$$

この定義で、ある E に対して 1_A が可積分ならば他の A を含む長方形 E' についても 1_A は E' 上可積分で

$$\iint_E 1_A(x,y)dxdy = \iint_{E'} 1_A(x,y)dxdy$$

が成立する。したがって、A の面積 $|A|$ の定義は E の取り方にはよらない。

例題 非負値有界関数 $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ が積分可能とする。このとき、集合

$$A = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

の面積は確定し、

$$|A| = \int_a^b f(x)dx$$

となる。

2.2 積分の定義 (一般の集合上の積分)

一般な有界集合上の積分の定義を与える。

Definition 5 $f(x, y)$ を有界集合 A 上の有界関数とする。

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in A \\ 0 & (x, y) \in A^c \end{cases} \tag{3}$$

と定義する。A を含む長方形 E を考え、$f^*(x, y)$ が E 上で積分可能の時、積分の値 $\iint_E f^*(x, y)dxdy$ は E の取り方によらないことがわかる。このとき、$f(x, y)$ は A 上で可積分であるといい、

$$\iint_A f(x, y)dxdy = \iint_E f^*(x, y)dxdy.$$

と定義する。

次の性質は積分の基本性質である。(3) に関しては、どのような集合の面積が 0 かを述べないと意味が無い。例えば、Proposition 12 で述べるように区分的に C^1 級の曲線などが一例である。

Theorem 6 $f(x, y), g(x, y)$ が有界集合 A で積分可能とする。

(1) 任意の実数 a, b に対して、$af(x, y) + bg(x, y)$ も積分可能で、

$$\iint_A (af(x, y) + bg(x, y))\, dxdy = a\iint_A f(x, y)dxdy + b\iint_B g(x, y)dxdy.$$

(2) $f(x, y) \leq g(x, y)$ ならば

$$\iint_A f(x, y)dxdy \leq \iint_A g(x, y)dxdy.$$

(3) $f(x, y)$ が有界集合 A, B で積分可能で $A \cap B$ の面積が 0 とする。このとき、$f(x, y)$ は $A \cup B$ で積分可能で

$$\iint_{A\cup B} f(x, y)dxdy = \iint_A f(x, y)dxdy + \iint_B f(x, y)dxdy.$$

(4) A の面積 0 の部分集合 C があって C の補集合上で $f(x, y) = g(x, y)$ が成立するならば

$$\iint_A f(x, y)dxdy = \iint_A g(x, y)dxdy.$$

2.2 可積分性の判定条件

どのような関数が可積分になるか、基本的な定理をあげる。

Theorem 7 $f(x, y)$ は $E = [a, b] \times [c, d]$ 上の連続関数とする。このとき、$f(x, y)$ は E 上で可積分である。

この定理は E 上の連続関数の一様連続性とダルブーの定理を用いて証明される。Theorem 7 は基本的な定理だが、これでは、どのような集合 A が面積確定かがわからない。というのは、A の面積は 1_A の積分として定義されるが、1_A という関数は連続関数ではないからである。そのため、Theorem 7 を少し拡張した次の定理をあげる。

Theorem 8 f を E 上の有界関数とする。f の不連続点全体の集合の面積が 0 ならば f は E で可積分である。

少し言葉を用意する。

Definition 9 A を平面内の集合とする。点 $P \in \mathbb{R}^2$ が A の境界点であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset$ かつ $B_\varepsilon(P) \cap A^c \neq \emptyset$ となるときに言う。ただし、$B_\varepsilon(P)$ は P の ε-近傍。A の境界点全体の集合を A の境界と言い、∂A と書く。

境界の定義から次がわかる。

Proposition 10 1_A の不連続点全体の集合は A の境界である。

従って、

Theorem 11 以下、A を平面内の有界集合とする。
(1) A の面積が確定することと A の境界の面積が 0 になることは同値である。
(2) A が面積確定集合とする。有界関数 f が A で連続ならば、f は A で積分可能である。

(2) は f^* の不連続点全体の集合は A の境界に含まれることから従う。
集合が面積確定であるかどうか知るにはその境界の面積が 0 かどうか判定する必要がある。平面上の曲線について講義したとき、正方形を埋め尽くす平面曲線があると述べたが、もちろんそのような曲線の面積は 0 ではない。しかし、我々が普通「曲線」と思う集合の面積は 0 である。すなわち

Proposition 12 区分的に C^1 級の平面曲線の面積は 0 である。

例題 A を有界集合とする。次の (1), (2) は同値であることを示せ。
(1) A の面積は 0.
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して有限個の長方形 I_i $(1 \leq i \leq n)$ が存在して $A \subset \cup_{i=1}^n I_i$ かつ $\sum_{i=1}^n |I_i| < \varepsilon$.

Corollary 13 有界集合 A の境界が区分的に C^1 級の曲線ならば、A の面積は確定する。また、この A 上で有界で連続な関数は可積分である。

この定理と一変数の積分可能な関数のグラフで囲まれた図形の面積が確定であることを用いると面積が確定する集合が多数あることがわかる。
最後に面積確定でない集合の例をあげておく。

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \text{かつ } x, y \text{ は有理数}\}.$$

このとき、$S(1_A) = 1, s(1_A) = 0$ で面積確定でない。