

2.3 可積分性の判定条件—補足—

この節ではどのような関数が可積分か述べてきた。次の定理も証明できるので各自で考えて見てほしい。

Theorem 1 $f(x, y)$ を面積確定な有界集合 A 上の有界関数で不連続点の集合の面積が 0 とする。このとき、 $f(x, y)$ は A で可積分である。

ヒント: f を A の補集合で 0 として平面上に拡張した関数 $f^*(x, y)$ の不連続点全体の集合の面積は?

2.4 累次積分

面積確定集合 A 上の連続関数 $f(x, y)$ は可積分であるとわかったが、それを具体的にどのように計算するか? が次の課題である。いちいちリーマン和の定義に立ち帰って計算するのは大変だし、具体的な値がわからないであろう。そのため、次の累次積分 (反復積分, 逐次積分とも言う) がよく使われる。

Theorem 2 (累次積分) $f(x, y)$ を $E = [a, b] \times [c, d]$ 上の連続関数とする。

(1) 任意の $x \in [a, b]$ に対して、 $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ で定義される関数 $F(x)$ は $[a, b]$ 上の連続関数で

$$\int_a^b F(x) dx = \iint_A f(x, y) dx dy.$$

(2) 任意の $y \in [c, d]$ に対して、 $G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ で定義される関数 $G(y)$ は $[c, d]$ 上の連続関数で

$$\int_c^d G(y) dy = \iint_A f(x, y) dx dy.$$

これは次のように一般化される。

Theorem 3 (累次積分) $c(x), d(x)$ ($a \leq x \leq b$) を連続関数で、 $c(x) \leq d(x)$ ($a \leq x \leq b$) とする。 $f = f(x, y)$ を

$$A = \{(x, y) \mid c(x) \leq y \leq d(x), a \leq x \leq b\}$$

上の連続関数とする。このとき $x \rightarrow \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy$ は x の連続関数であり、

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (1)$$

が成立する。

Remark 4 $f(x, y) \geq 0$ のときは、 $\iint_A f(x, y) dx dy$ の積分値は立体

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in A\}$$

の体積を表す。ただし、立体 V の体積の定義は、 V を含む直方体 E をとり、そこで V の定義関数 1_V (V で 1, V^c で 0 となる関数) を 3次元空間上の関数として積分したもの:

$$\iiint_E 1_V(x, y, z) dx dy dz$$

である。この値と Theorem 3 (1) の積分値 (1) が同じになるということは 3 次元空間上の関数の累次積分から示される。例えば、最初に z で積分しその後 (x, y) について積分してみれば、 $\iint_A f(x, y) dx dy$ となる。

上の累次積分の応用として、次の不等式が証明できる。この不等式は FKG 不等式と呼ばれる統計力学で重要な不等式の簡単な形のものである。なお、FKG は C.Fortuin, P.Kasteleyn, J.Ginibre の 3 人の頭文字である。

演習問題 (参考) $f(x), g(x)$ を $[0, 1]$ 上の単調増加な連続関数とすると

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 g(x) dx \right) \leq \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

が成立することを示せ。

一般に連続関数 $f(x), g(x)$ について成立する Schwarz の不等式

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left\{ \int_a^b f(x)^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b g(x)^2 dx \right\}^{1/2}$$

と混同しないように。

さらに次も演習問題としてあげておく。これと類似の問題が基礎工学研究科数理科学の入試問題に出ています。

問 $\min(x, y)$ で x と y の小さい数を表すとすると。 $a > 0$ とする。 $\iint_{[0, a]^2} \min(x, y) dx dy$ を計算せよ。

2.5 補足 \mathbb{R}^3 上の積分について

累次積分のところで立体の体積に関連して 3 次元空間の積分について少しふれた。ここまで考えてきた \mathbb{R} や \mathbb{R}^2 の部分集合上の積分と同様に、 \mathbb{R}^n 上の積分が定義できる。ここでは、 \mathbb{R}^3 での図形の体積、積分について簡単な補足事項をまとめる。

Definition 5 (積分の定義) $E = \{(x, y, z) \mid x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [e, f]\}$ とする。 $f(x, y, z)$ を E 上の有界関数とする。 $f(x, y, z)$ の E 上の積分 $\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$ の定義を与える。 E の分割

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d, \quad e = z_0 < z_1 < \dots < z_l = f,$$

に対し、

$$S(f, \Delta) = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq l} \sup \{f(P) \mid P \in E_{ijk}\} |E_{i,j,k}|$$

$$s(f, \Delta) = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq l} \inf \{f(P) \mid P \in E_{ijk}\} |E_{i,j,k}|.$$

ここで $E_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, $|E_{ijk}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$. さらに

$$S(f) = \inf \{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ はすべての分割を動く}\}$$

$$s(f) = \sup \{s(f, \Delta) \mid \Delta \text{ はすべての分割を動く}\}$$

$S(f) = s(f)$ のとき、 $f(x, y, z)$ は E で可積分といい、この値を $\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$ と書く。

1次元、2次元と同様 Darboux の定理が成り立つ：

Theorem 6 Δ に対して $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1}, z_k - z_{k-1} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq l\}$ とおく。 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(f, \Delta) = S(f)$, $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} s(f, \Delta) = s(f)$ が成立する。

積分に基づいて体積の定義を与える。有界集合 $V \subset \mathbb{R}^3$ を考える。

$$1_V(x, y, z) = \begin{cases} 1 & (x, y, z) \in V \\ 0 & (x, y, z) \in V^c \end{cases} \quad (2)$$

と定義し、 1_V を V の定義関数と言う。

Definition 7 (有界集合の体積の定義) $V \subset E$ となる直方体を取ると、 1_V が E で可積分のとき、

$$|V| = \iiint_E 1_V(x, y, z) dx dy dz. \quad (3)$$

この定義で、ある E に対して 1_V が可積分ならば他の V を含む長方形 E' についても 1_V は E' 上可積分で

$$\iiint_E 1_V(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E'} 1_V(x, y, z) dx dy dz$$

が成立する。したがって、 V の体積 $|V|$ の定義は E の取り方にはよらない。

Definition 8 $f(x, y, z)$ を \mathbb{R}^3 の有界集合 V 上の有界関数とする。

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & (x, y, z) \in V \\ 0 & (x, y, z) \in V^c \end{cases} \quad (4)$$

と定義する。 V を含む直方体 E を考え、 $f^*(x, y, z)$ が E 上で積分可能の時、積分の値 $\iiint_E f^*(x, y, z) dx dy dz$ は E の取り方によらないことがわかる。このとき、 $f(x, y, z)$ は E 上で可積分であるといい、

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E f^*(x, y, z) dx dy dz.$$

と定義する。

Theorem 9 \mathbb{R}^3 内の滑らかな曲面で囲まれた図形の体積は確定する。

Theorem 10 (累次積分の公式) A を (x, y) 平面内の面積確定な有界集合とする。 $\varphi(x, y), \phi(x, y)$ を A 上の有界連続関数で $\varphi(x, y) \leq \phi(x, y)$ ($(x, y) \in A$) をみたすとする。このとき、集合

$$B = \{(x, y, z) \mid \varphi(x, y) \leq z \leq \phi(x, y), (x, y) \in A\}.$$

の体積は確定で、

$$|B| = \iint_A (\phi(x, y) - \varphi(x, y)) dx dy.$$

また、 $f(x, y, z)$ が B 上の連続関数ならば f は B で積分可能で

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iint_A \left\{ \int_{\varphi(x, y)}^{\phi(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dx dy.$$

問 $a > 0$ とする。 $\iiint_{[0,a]^3} \min(x, y, z) dx dy dz$ を計算せよ。

2.6 補足：積分の定義について

次の定理 (教科書の定理 5.12) が成立する。

Theorem 11 A を \mathbb{R}^2 の面積確定有界集合とする。 $f(x, y)$ を A 上の有界連続関数とする。 A の分割 $\Delta: A = \cup_{i=1}^n A_i$ を考える。ただし、各 A_i は面積確定集合で、 $A_i \cap A_j$ の面積は 0 とする。また、各小領域 A_i から 1 点 $P_i (\in A_i)$ を選んでおく。 $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} \delta(A_i)$ と定める。ここで

$$\delta(A_i) = \sup\{d(P, Q) \mid P, Q \in A_i\}$$

であり、 A_i の直径を表す。

$$I(f, \{P_i\}, \Delta) = \sum_{i=1}^n f(P_i) |A_i|$$

とおく。 $|A_i|$ は A_i の面積を表す。 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} I(f, \{P_i\}, \Delta)$ は積分 $\iint_A f(x, y) dx dy$ の値に収束する。

V が体積確定な立体でも同様なことが成立する。我々の立場からすればこれは定理である。しかし、上の極限を積分の定義とする立場もありえる。

実際、昔の理工系の学生なら微積分の講義で積分を学ぶよりも前に、電磁気学とか物理数学とかよばれる 1 年次の講義でリーマン和の極限 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} I(f, \{P_i\}, \Delta)$ の形で多変数関数の積分にいきなり出くわすものであった。皆さんもそうでしょうか？ただし、厳密に理論を構築していくという立場に立つと、上記の流儀では面積をどのように定義しているのか？という疑問もわく。我々はあまりへんてこな図形を考えないからすべての図形には面積が定義可能と思いがちだが、実際はそうではないことに注意してほしい。