1.5 Wallisの公式とその応用

Wallis の公式とは次の極限を与える公式である：

Theorem 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sqrt{n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ただし, $(2n)!!=2n\cdot(2n-2)\cdots 2\ (n\geq 1)$, $(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots 1\ (n\geq 1)$ である．また,

$$I_n=\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^n d\theta$$

とおくと部分積分を何回を用いて

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \\ I_{2n+1} &= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{aligned}$$

を得る．従って Wallis の公式は

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^n d\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

の極限を与えているものと見れる．

Wallis の公式を用いると

Theorem 2 (Stirlingの公式)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n}=1$$

を示せる．Stirling の公式は $n!$ がどのぐらい早く無限大に発散するか、評価している式である．

また， $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ も Wallis の公式の応用として示すことができる．講義ではこれを解説する．証明の流れは次の通り．

(1) $x>0$ ならば $1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$ を示す．

(2) $I=\sqrt{n}\int_0^\infty e^{-nx^2}dx$ を示す．これと (1) より

$$\sqrt{n}\int_0^1(1-x^2)^n dx\leq I\leq\sqrt{n}\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)^n}dx.$$

(3) (2) の不等式の左辺, 右辺をそれぞれ $x=\cos\theta\ (0\leq\theta\leq\pi/2)$, $x=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ (0<\theta<\pi/2)$ と置換積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^1(1-x^2)^n dx &= \int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2n+1}d\theta, \\ \int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)^n}dx &= \int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2n-2}d\theta \end{aligned}$$

を得る．ここで Wallis の公式を用いれば $I=\sqrt{\pi}/2$.

1.6 曲線の長さ

Definition 3 (曲線の定義) 平面曲線とは $\mathbb{R}$ の区間から平面への連続写像を言う。すなわち、t の連続写像 $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ $(a \leq t \leq b)$ を言う。さらに、

(i) $t \neq t'$ のとき、$\varphi(t) \neq \varphi(t')$ となるとき、単純曲線と言う。

(ii) 曲線 $\varphi(t)$ が $\varphi(a) = \varphi(b)$ かつ $t \neq t'$ でどちらかが a, b と異なるとき、$\varphi(t) \neq \varphi(t')$ となるとき、単純閉曲線と言う。

Remark 4 単純閉曲線の一番代表的な例は円 $\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ $(0 \leq t \leq 1)$. である。この例からもわかるように「単純閉曲線は曲線の内側と外側の二つの部分に平面を分ける」ということ (*Jordan* の定理) が証明できる。しかし、その証明は易しくない。

Definition 5 平面曲線 $\varphi(t)$ $(a \leq t \leq b)$ の長さ $l(\varphi)$ を

$$l(\varphi) \quad = \quad \sup\left\{ l(\varphi, \Delta) \;\middle|\; \Delta = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\} \text{ は } [a,b] \text{ のすべての分割を動く} \right\} \tag{1}$$

と定義する。ただし、$[a, b]$ の分割 $\Delta = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ に対して、

$$l(\varphi, \Delta) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(t_i)\varphi(t_{i+1})} \tag{2}$$

とする。また、$\overline{\varphi(t_i)\varphi(t_{i+1})}$ は *2* 点 $\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1})$ を結ぶ線分の長さを表す。

Theorem 6 (1) $\varphi(t)$ $(a \leq t \leq b)$ の長さが有限であるための必要十分条件は分割の列 Δ_n で $|\Delta_n| \to 0$ となるものが存在し $\sup_n l(\varphi, \Delta_n) < \infty$ となることである.

(2) 曲線 $\varphi(t)$ $(a \leq t \leq b)$ の長さが有限とする。このとき、$l(\varphi) = \lim_{|\Delta| \to 0} l(\varphi, \Delta)$.

Theorem 7 $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ $(a \leq t \leq b)$ が C^1-曲線とする。すなわち、$x(t), y(t)$ が t の C^1-関数とする。このとき、φ は長さ有限で、

$$l(\varphi) = \int_a^b |\dot{\varphi}(t)| dt.$$

ただし $|\dot{\varphi}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$.

上記の定理はいわゆる「区分的に C^1 級の曲線」に対して成立する. $\varphi(t)$ $(a \leq t \leq b)$ が区分的に C^1 級とは適当な区間の分割 $a = t_0 < \ldots t_n = b$ が存在して各区間ごとに $\varphi(t)$ $(t_i \leq t \leq t_{i+1})$ が C^1 級のときに言う.

Remark 8 (極限 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ について)

この極限を考えているときは、角度は弧度法で考えていることに注意せよ。すなわち、半径 1 の円は長さ有限な単純閉曲線である。(**ただし、長さ有限ということを単純に円の表示** $\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ **と Theorem 7 を用いて言おうとするのは理論的におかしい。なぜか?**) したがって、その長さが決まるがその値が 2π となるように π を決める。次にこの意味で角度 x で決まる $\sin x$(直角三角形の高さ) とその角度 x の見込む弧の長さ x の比 $\frac{\sin x}{x}$ が 1 に収束することを主張していることになる。したがって、この極限の正確な理解には曲線の長さの定義が必要なことに注意してほしい。正確な証明は教科書 *18,19* ページを見ること。