1.5 広義積分 (II)

今回の講義の内容は

　2. 無限区間での広義積分の定義と収束の判定条件

Definition 1 $f(x)$ を区間 $[a, \infty)$ 上の関数で次を仮定する。
(1) 任意の $c \in [a, \infty)$ に対して、$f(x)$ は $[a, c]$ 上で有界かつ積分可能である。
(2) 極限 $\displaystyle\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$ が存在する。
　このとき、$f(x)$ は $[a, \infty)$ で広義積分可能であるといい、この極限値を $\int_a^\infty f(x)dx$ と書く。

　広義積分の例をあげる。

例

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^s}$ $(s > 0, x > 0)$ この $f(x)$ の $[a, \infty)$ $(a > 0)$ での積分は広義積分になる。結果は

　(i)　$s \le 1$ のとき $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^s}dx = +\infty$

　(ii)　$s > 1$ のとき $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^s}dx = \frac{a^{1-s}}{s-1}$

(2) $\alpha > 0$ のとき $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}.$

　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ もわかるが、上の積分ほど簡単にはわからない。また、不定積分 $\displaystyle\int_0^c e^{-x^2}dx$ は初等関数 (多項式、およびその分数の形で表される関数 (有理関数とよばれる)、三角関数、対数関数、指数関数の有限回の合成で表される関数のこと、つまりわれわれがよく出会う関数) にはならない。しかし、この広義積分が収束することは以下の判定条件を用いれば簡単にわかる。

Theorem 2 $f(x)$, $g(x)$ を $[a, \infty)$ 上の関数で次の (1), (2), (3) をみたすとする。
(1) 任意の $a < c < \infty$ に対して、$f(x), g(x)$ は $[a, c]$ で有界・可積分。
(2) ある R が存在して、すべての $x \ge R$ について $|f(x)| \le g(x)$.
(3) $\displaystyle\lim_{c\to\infty}\int_a^c g(x)dx$ が有限な値に収束する *(*すなわち $g(x)$ は $[a, \infty)$ で広義積分可能*)*。
　このとき、$\displaystyle\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$ の有限な極限が存在する。すなわち $f(x)$ は $[a, \infty)$ で広義積分可能である。

(注) (2) の内容は「十分大きな x について $|f(x)| \le g(x)$」ということである。この言いかたは、前期配布のプリント「数学用語集」で指摘してあります。
　この定理の系として、

Corollary 3 $f(x)$ を $[a, \infty)$ 上の関数とし、次の (1), (2) を仮定する。
(1) 任意の $a < c < \infty$ に対して、$f(x)$ は $[a, c]$ で有界・可積分。
(2) ある正数 C と $s > 1$, a より大きな正数 R が存在して、任意の $x > R$ に対して、$|f(x)| \le \dfrac{C}{x^s}$.
　このとき、$f(x)$ は $[a, \infty)$ で広義積分可能。

Theorem 2 は次の二つの補題を用いて証明される。

Lemma 4 $F(x)$ を $[R,\infty)$ 上の関数とする。次の (1), (2) は同値である。
(1) $\lim_{x\to\infty} F(x)$ がある有限な値に収束する。
(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $S > R$ が存在して $x_i > S$ $(i = 1, 2)$ をみたす任意の x_1, x_2 に対して、$|F(x_1) - F(x_2)| \le \varepsilon$.

Lemma 5 $f(x), g(x)$ を $[x_1, x_2]$ 上の有界・可積分な関数ですべての $x_1 \le x \le x_2$ に対して $|f(x)| \le g(x)$ とする。このとき、

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx \le \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx.$$

Theorem 2 から次の結果もただちにわかる。

Corollary 6 $f(x)$ を $[a,\infty)$ 上の関数とし、$f(x), |f(x)|$ ともに任意の $c > a$ に対して、$[a, c]$ 上で積分可能とする。$|f(x)|$ が $[a,\infty)$ で広義積分可能なら、$f(x)$ も $[a,\infty)$ で広義積分可能。

Definition 7 上記の *Corollary* のように $f(x), |f(x)|$、両方の広義積分が収束するとき、$f(x)$ の広義積分は絶対収束すると言う。$f(x)$ の広義積分は収束し、$|f(x)|$ の広義積分が収束しないこともある。このとき、$f(x)$ の広義積分は条件収束すると言う。

例
(1) $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ $(s > 0)$ は s の関数であるが、これをガンマ関数という。$0 < s < 1$ のときは、$x = 0$ で広義積分であり、$x = 0$ の近くと無限区間の両方の広義積分が含まれていることに注意して欲しい。この積分は $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0, R\to\infty}\int_\varepsilon^R e^{-x}x^{s-1}dx$ の極限として定義されている。適当に定数 $a > 0$ を取り、$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^a e^{-x}x^{s-1}dx$, $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_a^R e^{-x}x^{s-1}dx$ の二つの極限の和と定義しても同じである。

$s > 0$ なら定数 $C > 0$ を十分大きく取ると

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 \text{ のとき} \qquad & e^{-x}x^{s-1} \le x^{s-1} \\ x \ge 1 \text{ のとき} \qquad & e^{-x}x^{s-1} \le e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

となるから広義積分が収束することがわかる。$\Gamma(n+1) = n!$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ であるから $\Gamma(s+1)$ を $s!$ と書くこともある。
(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^\alpha}dx$ $(\alpha > 0)$. この積分は収束する。十分大きな正数 C を取れば、$x \ge 1$ のとき $e^{-x^\alpha} \le \frac{C}{x^2}$ だから。
(3) $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ は条件収束するが絶対収束しない広義積分の例を与える。この積分は Dirichlet(ディリクレ) 積分と呼ばれる。この例は 10 月 30 日のプリントで述べた広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ と関連している。
(注) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ の広義積分は、$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{S\to\infty, R\to\infty}\int_{-S}^R f(x)dx$ のように定義される。やはり S, R は互いに無関係に極限を取ることに注意。