# 1 リーマン積分の定義

## 1.1 Darboux の上積分・下積分

**Definition 1 (Darboux の上積分・下積分)** $a < b$ となる二つの実数 $a, b$ を取り、有界閉区間 $I = [a, b]$ を考える。
(1) 数列 $\{a_i\}_{i=0}^n$ が

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b \tag{1}$$

を満たすとき、$I$ の分割と言う。分割は $\Delta$ で表すことにする。$n$ は自然数であり、とくに $a_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ のときは、$I$ の $n$ 等分の分割である。また、$I$ の分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n$ に対して $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n}(a_i - a_{i-1})$ と書くことにする。
(2) $f(x)$ を $I$ 上の有界関数とする。すなわちある数 $M > 0$ が存在して $|f(x)| \leq M$ $(\forall x \in I)$ とする。$I$ の分割 $\Delta = \{a_0, \ldots, a_n\}$ に対して

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \sup\{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\}(a_i - a_{i-1}) \tag{2}$$

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n \inf\{f(x) \mid x \in [a_{i-1}, a_i]\}(a_i - a_{i-1}). \tag{3}$$

$S(f, \Delta)$ は *Darboux* (ダルブー) の過剰和, $s(f, \Delta)$ は *Darboux* の不足和と言う。
$f$ の区間 $I$ での上積分 $S(f)$, 下積分 $s(f)$ を

$$S(f) = \inf\{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } I \text{ のすべての分割を動く。}\} \tag{4}$$

$$s(f) = \sup\{S(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } I \text{ のすべての分割を動く。}\} \tag{5}$$

と定義する。$S(f) = s(f)$ のとき、$f(x)$ は $I$ で積分可能と言う。この値を $f$ の $I$ での積分と言い、$\int_{[a,b]} f(x)dx$ (または $\int_a^b f(x)dx$) と書く。

$S(f), s(f)$ はそれぞれ、ある数の集合の下限、上限で定義されている。したがって、それらの集合が下に有界、上に有界で無ければならない。これは、

$$\inf_{x \in I} f(x)(b-a) \leq S(f, \Delta), \quad s(f, \Delta) \leq \sup_{x \in I} f(x)(b-a)$$

から分かる。$S(f, \Delta), s(f, \Delta)$ の基本的な性質をまとめる。その前に言葉を一つ用意する。

**Definition 2** (1) $I = [a, b]$ の二つの分割 $\Delta = \{a_i\}_{i=0}^n, \Delta' = \{a'_i\}_{i=0}^m$ を考える。$\Delta'$ が $\Delta$ の細分であるとは $\Delta$ の分割点 $\{a_i\}_{i=0}^n$ が $\Delta'$ の分割点 $\{a'_i\}_{i=0}^m$ にすべて含まれているときに言う。
(2) $I$ の二つの分割 $\Delta_1 = \{\alpha_i\}_{i=0}^n, \Delta_2 = \{\beta_i\}_{i=0}^m$ に対して二つの分点を合わせた集合 $\{\alpha_i\}_{i=0}^n \cup \{\beta_i\}_{i=0}^m$ を分割点とする分割を $\Delta_1 \curlyvee \Delta_2$ と書くことにする。$\Delta_1 \curlyvee \Delta_2$ は $\Delta_1, \Delta_2$ の細分である。

以下、特に断らない限り、$f(x)$ は有界な関数とする。

**Proposition 3** (1) 任意の分割 $\Delta$ に対して

$$\inf_{x \in I} f(x)(b-a) \leq s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta) \leq \sup_{x \in I} f(x)(b-a).$$

(2) $\Delta'$ が $\Delta$ の細分とすると

$$s(f,\Delta) \le s(f,\Delta'), \quad S(f,\Delta') \le S(f,\Delta).$$

(3) 任意の分割 $\Delta_1, \Delta_2$ に対して、

$$s(f,\Delta_1) \le S(f,\Delta_2).$$

(4) 任意の $f$ に対して $s(f) \le S(f)$.

例 $f(x) = x$ $I = [0,a]$ のとき、$f(x)$ は積分可能で、$\int_0^a xdx = \frac{a^2}{2}$. これは、次のように示される。分割 $\Delta = \{a = a_0 < a_1 < \cdots a_n = b\}$ を取る。このとき $S(f,\Delta) = \sum_{i=1}^n a_i(a_i - a_{i-1})$, $s(f,\Delta) = \sum_{i=1}^n a_{i-1}(a_i - a_{i-1})$. 一方 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i + a_{i-1}}{2}(a_i - a_{i-1}) = \frac{a^2}{2}$ に注意する。したがって

$$0 \le S(f,\Delta) - \frac{a^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{(a_i - a_{i-1})^2}{2} \le \frac{|\Delta|}{2} a$$

ゆえに $S(f) = \frac{a^2}{2}$ である。$s(f) = \frac{a^2}{2}$ も同様に示せる。

実は一般の有界関数 $f$ について、Darboux により次が示されている。

**Theorem 4** $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$ ならば $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,\Delta_n) = S(f)$, $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,\Delta_n) = s(f)$.

これから

**Corollary 5** 次の (1), (2) は同値である。
(1) $f(x)$ は $I$ 上可積分である。
(2) $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$ となる分割の列で $\lim_{n\to\infty}(S(f,\Delta_n) - s(f,\Delta_n)) = 0$ となるものが存在する。

この講義では Darboux による上積分、下積分を用いて積分を定義したが、これは次の定義とも同値になる。

**Definition 6** $f(x)$ を $I = [a,b]$ 上の有界関数とする。$\Delta = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ を $I$ の分割とする。更に点列 $\{\xi_i\}_i = 0^{n-1}$ を $a_{i-1} \le \xi_{i-1} \le a_i$ $(1 \le i \le n)$ をみたすようにとる。

$$I(f, \{\xi_i\}, \Delta) = \sum_{i=1}^n f(\xi_{i-1})(a_i - a_{i-1}) \tag{6}$$

と書き、$f(x)$ のリーマン和と呼ぶ。$|\Delta| \to 0$ のとき、$\{\xi_i\}$ の取り方によらず $I(f, \xi_i, \Delta)$ が一定の値に収束するとき $f(x)$ は $I$ で可積分であるといい、極限値を $\int_a^b f(x)dx$ と書く。

**Remark 7** (1)

$$s(f,\Delta) \le I(f, \{\xi_i\}, \Delta) \le S(f,\Delta)$$

が常に成り立つ。
(2) $f(x)$ が $[a,b]$ でリーマン積分可能なら

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \frac{b-a}{n}.$$