1.3 微積分法の基本定理

まず、原始関数 (primitive function)、不定積分 (indefinite integral) の定義を与える。

Definition 1 $f(x)$ を区間 $[a,b]$ 上の関数とする。
(1) $[a,b]$ 上の微分可能な関数 $G(x)$ で $[a,b]$ 上で $G'(x)=f(x)$ となる $G(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。
(2) $f(x)$ は $[a,b]$ で有界、可積分とする。$[a,b]$ の点 c をとり、

$$F_c(x)=\int_c^x f(t)dt \qquad x\in[a,b]$$

と定義した関数を $f(x)$ の不定積分という。

注 原始関数が存在しないような関数もある。また、積分可能関数 $f(x)$ の不定積分 $F_c(x)$ について $F_c'(x)=f(x)$ となると期待したいが、一般には成立しない。先週の関数 $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ を考える：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{p} & x \text{ は } 0 \text{ でない有理数で } x=\frac{q}{p} \text{ のとき。ただし } p,q \text{ は互いに素な整数で } q>0 \text{ とする。}\\ 0 & x \text{ が無理数または } 0 \text{ のとき}\end{cases} \tag{1}$$

$c\in\mathbb{R}$ について $F_c(x)=0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ となり $F_c'(x)=0\neq f(x)$ である。さらに、$G'(x)=f(x)$ となる $G(x)$ は存在しないことも示すことができる。では、どのような積分可能な関数について、積分してから微分するともとの関数に戻るだろうか？

Theorem 2 (微積分法の基本定理) $f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする。
(1) $f(x)$ の不定積分 $F_c(x)$ について $F_c'(x)=f(x)$. すなわち $F_c(x)$ は $f(x)$ の原始関数である。
(2) $G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると $G(x)-F_c(x)$ は $[a,b]$ 上で定数である。
(3) $G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする。任意の α,β $(a\leq\alpha\leq\beta\leq b)$ について

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=G(\beta)-G(\alpha).$$

(注) この定理を用いると (i) 積の微分法を用いて部分積分の公式, (ii) 合成関数の微分法を用いて置換積分法, を導けることがわかる。

Theorem 2 (1) の $F_c'(x)=f(x)$ は次の定理を用いて証明される。

Theorem 3 (積分の平均値の定理) $f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする。任意の α,β $(a\leq\alpha\leq\beta\leq b)$ に対して $\gamma\in(\alpha,\beta)$ が存在して

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\gamma)(\beta-\alpha).$$

証明について： $f(x)$ $(\alpha\leq x\leq\beta)$ の最小値を m, 最大値を M とすると $m\leq\dfrac{1}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq M$. 中間値の定理より $\exists\gamma\in[\alpha,\beta]$, $f(\gamma)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$ がわかる. しかし, これでは $\gamma\in(\alpha,\beta)$ とできるかわからない. これを示すには例えばさらに次の補題を用いればよい。

Lemma 4 $f(x)$ を $[\alpha,\beta]$ 上の連続関数ですべての x について $f(x)\geq 0$ とする。$\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ ならば $f(x)=0$ $(\forall x)$.